

מרצה: דר' ארז שיינר
מתרגלים: גב' ירדן נתיב ומר ניר שרייבר
משך המבחן: שלוש שעות
חומר עזר: נוסחאון מצורף ומחשבון מדעי
משקל כל שאלה: 22 נק'

1. (משיעורי הבית) מצאו פתרון למד"ר $\ln(x) = 2y$ (מקיים $xy' - 1 = 0$) המקיים $y(e) = 0$.
 2. (משיעורי הבית) מצאו פתרון למד"ר $0 = 2y \cos^2(x) dy - (1 + y^2 \sin(2x)) dx$ (מקיים $y(0) = -2$).
 3. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 2y' + y = xe^{2x}$ (מקיים $y(0) = 0, y'(0) = 0$).
 4. מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $-\pi < x < \pi$.
 5. כדור בעל מסה $m = 1 \text{ kg}$ נבעט לכיוון מעלה במהירות התחלתית של 20 מטר לשנייה. מה יהיה גובה הכדור ברגע שהמהירות הרגעית שלו תתאפס כאשר:
(בשני הסעיפים לצורך הפשטות ניתן להניח כי קבוע תאוצת כדור הארץ הוא $g = 10$).
- א. הכוח היחיד הפועל על הכדור הוא כוח המשיכה mg .
- ב. הכוחות הפועלים על הכדור הם כוח המשיכה mg וכוח התנגדות האוויר שגודלו שווה לגודל המהירות v .

נוסחאון למבחן מד"ר תשפ"ג

נגזרות:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
a^x	$\ln a \cdot a^x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{a}{a^2 + x^2}$
e^{ax}	ae^{ax}

אינטגרלים

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + C$

אינטגרציה בחלקים: $\int uv' = uv - \int u'v$

זהויות טריגונומטריות מרכזיות:

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \tan(\alpha) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \cot(\alpha) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1 \quad \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

טורי טיילור הבסיסיים:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots \quad (\forall x)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \dots \quad (\forall x)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots \quad (\forall x)$$

למציאת טור טיילור סביב $x_0 \neq 0$ יש להשתמש בהצבה $t = x - x_0$.

נוסחא כללית למד"ר לינארית:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot (C + \int (q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}) dx)$$

גורמי אינטגרציה במד"ר מדויקת:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{Py - Qx}{Q} dx} \quad \mu(y) = e^{\int \frac{Qx - Py}{P} dy}$$

מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים, פתרון המתאים לשורש מרוכב של פולינום אופייני: בהינתן פתרון לפולינום האופייני $\lambda = a \pm bi$ (תמיד גם הצמוד יהיה פתרון), הפתרון המתאים למד"ר יהיה

$$y = C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \sin(bx)$$

שיטת הניחוש למד"ר לינארית מסדר גבוה עם מקדמים לא הומוגנית:

אם $f(x)$ פולינום מדרגה m :

- אם $\lambda = 0$ אינו שורש של הפולינום האופייני מנחשים y_p פולינום מסדר m .
- אם כן, מנחשים את אותו y_p מוכפל ב- x^k , כאשר k החזקה של $\lambda = 0$ בפולינום האופייני.

אם $f(x)$ פולינום מדרגה m מוכפל ב- e^{ax} :

- אם $\lambda = a$ אינו שורש של הפולינום האופייני מנחשים y_p פולינום מסדר m המוכפל ב- e^{ax} .
- אם כן, מנחשים את אותו y_p מוכפל ב- x^k , כאשר k החזקה של λ בפולינום האופייני.

אם $f(x)$ פולינום מדרגה m מוכפל ב- $e^{ax} \sin(bx)$ או ב- $e^{ax} \cos(bx)$:

- אם $\lambda = a + bi$ אינו שורש של הפולינום האופייני, מנחשים $y_p = Q_m(x) e^{ax} \sin(bx) + R_m(x) e^{ax} \cos(bx)$ כאשר $Q_m(x), R_m(x)$ הם שני פולינומים שונים מסדר m . אם $f(x)$ היא חיבור של שתי פונקציות, בוחרים את הסדר הגבוה מבין שני הפולינומים.
- אם כן, מנחשים את אותו y_p מוכפל ב- x^k , כאשר k החזקה של λ בפולינום האופייני.

נוסחאות שיטת אוילר ושיטת אוילר המשופרת:

נתונה מד"ר בצורתה הנורמלית $y' = f(x, y)$ ונקודת התחלה (x_0, y_0) .

$$x_n = x_{n-1} + h = x_0 + nh$$

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

משופרת:

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot y'_{x_{n-1} + \frac{h}{2}} = y_{n-1} + h \cdot f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}, y_{n-1} + \frac{h}{2} \cdot y'_{n-1}\right)$$

מקדמי טור פורייה:

טור פורייה מתכנס לפונקציה $f(x)$ בטווח $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

כאשר מקדמי פורייה נתונים ע"י הנוסחא:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$