שיעור 2 (3.3.2014) – פונקציות רציפות :

דוגמה : $f(z) = C$ היא רציפה, ברור.

משפט : יהיו φ_1, φ_2 רציפות אזי גם $\varphi_1 \cdot \varphi_2$, $\varphi_1 \pm \varphi_2$ רציפות וגם $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ בנקודות בהן $\varphi_2 \neq 0$.

הוכחה : בדיוק אותו דבר כמו בממשיות.

לכן גם כל הפולינומים פונקציות רציפות וגם על הפונקציות הרציונאליות.

<u>הגדרה</u> : תהי f מוגדרת בסביבת z_0 [כלומר ב$B(z_0, r)$ עבור r>0 כלשהו] . נאמר שf גזירה בz_0 אם קיים $\lim_{z\to 0}\frac{f(z_0+z)-f(z_0)}{z}$.

דוגמאות :

1. $f(z) = z$. האם היא גזירה? עבור z_0 כלשהו, נבדוק אם קיים הגבול $\lim_{z\to 0}\frac{(z_0+z)-z_0}{z} = 1 = f'(z_0)$, ועל כאן היא גזירה.
2. $f(z) = z^2$ ושוב נחשב את הגבול : $\lim_{z\to 0}\frac{(z_0+z)^2-z_0^2}{z} = 2z_0 = f'(z) = (z^2)'_{z_0}$. נשים לב שזה מאוד דומה לממשיים עד כה!
3. $g(z) = \bar{z}$, ראינו שהיא לא גזירה בתרגול! אבל היא רציפה בוודאות.

- הערה : רושמים בד"כ $g(z) = u(z) + v(z)i$ וg רציפה או"א u, v רציפות.

<u>דיפרנציאביליות</u> :

φ מוגדרת בסביבת z_0 נקראת דיפרנציאבילית או"א יש קבוע A כך ש$f(z_0 + z) = f(z_0) + Az + \varepsilon(z) \cdot z$ כאשר $\varepsilon(z) \to 0$, $z \to 0$ או $f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + \varepsilon(z) \cdot (Z - z_0), \varepsilon(z) \to 0, z \to z_0$.

משפט : f דיפרנצ' בz_0 או"א f גזירה בz_0 ואז $f'(z_0) = A$.

הוכחה : $\Leftarrow$: מתקיים $f(z_0 + z) - f(z_0) = z\big(A + \varepsilon(z)\big)$ ולכן $\frac{f(z_0+z)-f(z_0)}{z} = A$. כעת לכיוון השני :

$\Rightarrow$: נניח שf גזירה בz_0. ז"א ש$\lim_{z\to 0}\frac{f(z_0+z)-f(z_0)}{z} = f'(z_0)$. כלומר $f(z + z_0) - f(z_0) - zf'(z_0) = z\varepsilon(z)$ עבור $\varepsilon(z) \to 0$, $z \to 0$. נקבל $f(z + z_0) = f(z_0) + f'(z_0)z + \varepsilon(z) \cdot z$. מ.ש.ל. ■.

<u>דיפרנציאביליות של פונקציה של שתי משתנים</u> :

הגדרה : $h(x, y)$ המוגדרת בסביבה $(x_0. y_0)$ ב$\mathbb{R}^2$ נקראת דיפרנציאבילית ב(x_0, y_0) אם יש A,B קבועים כך ש : $h(x_0 + x, y_o + y) = h(x_0, y_0) + Ax + By + \varepsilon(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$. כאשר $\varepsilon(x, y) \to 0$, $x, y \to 0$.

משפט : אם h דיפ' אז קיימות לh הנגזרות החלקיות $h'_x(x_0, y_0) = A$, $h'_y(x_0, y_0) = B$. חשוב מאוד לשים לב שקיום נגזרות חלקיות לא גורר דיפנרציאבליות . (נביט בדוגמה $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} , (x, y) \neq (0,0) \\ 0 , (0,0) \end{cases}$).

הוכחה : לא נוכיח ממש, רק נסביר. אך זה נכון כי $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \le \sqrt{x^2 + y^2} \le x^2 + y^2$, כלומר $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ ואו"א $|x|, |y| \to 0$.

משפט : f=u+iv שמוגדרת בסביבת z_0 גזירהz_0 או"א u, v דיפרנציאבליות ב$z_0 = (x_0, y_0)$. ובנוסף $u'_x = v'_y$ ו$u'_y = -v'_x$ והם נקראים משוואות קושי רימן.

הוכחה: נניח f גזירה. נסמן $f'(z_0)=a+ib$ כאשר a,b ממשיים. לפי ש-f דיפרנציאבילית מתקיים $f(z_0+z)=f(z_0)+f'(z_0)z+\varepsilon(z)|z-z_0|, \varepsilon(z)\to 0, z\to 0$.

כעת, נרשום $u(z_0+z)+iv(z_0+z)=u(z_0)+iv(z_0)+(a+ib)(x+iy)+\varepsilon(z)\sqrt{z^2+y^2}$ כאשר $\varepsilon(x,y)=\varepsilon_1(x,y)+\varepsilon_2(x,y)$ וכמובן $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$.

לכן $u(z_0+z)+iv(z_0+z)=u(z_0)+iv(z_0)+ax-by+i(bx+ay)+\varepsilon_1(x,y)\sqrt{x^2+y^2}+\varepsilon_2(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$. כעת נפריד חלקים ממשיים ומדומים: $u(z_0+z)=u(z_0)+ax-by+\varepsilon_1(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$ וגם $v(z_0+z)=v(z_0)+bx+by+\varepsilon_2(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$.

קיבלנו ש-u,v דיפרנציאבילית ובנוסף $a=u'_x(x_0,y_0)=v'(x_0,y_0), b=v'_x(x_0,y_0)=-u'_y(x_0,y_0)$.

בכיוון ההפוך, נניח דיפרנציאביליות של u,v ואת קיום משוואות קושי רימן. ע"י שימוש במשוואות מהכיוון השני נקבל את ההוכחה. לכן f דיפרנציאבילית ב-z_0 ולכן גזירה שם. מ.ש.ל. ■

דוגמה: אם ניקח $z=x$ ממשי, נקבל $f=u+iv$ ו-$f'(z_0)=u'_x+u'_yi$. אם ניקח $z=iy$ כאשר y ממשי אז $f'(z_0)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(z+z_0)-f(z_0)}{iy}\right)=-ilim_{y\to 0}\frac{f(z_0+iy)-f(z_0)}{y}=$
$-i\lim_{y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+y)+iv(x_0,y_0+y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+y)-u(x_0,y_0)}{y}+\frac{v(x_0,y_0+y)-v(x_0,y)}{y}=$
$-i(u'_y+iv'_y)=v'_y-iu'_y=u'_x+iv'_x$. ולכן, מכאן, $u'_x=v'_y, -u'_y=v'_x$.

<u>קשר בין נגזרת כיוונית לנגזרת</u>:

נגזרת בכיוון θ של פונקציה הוא $\lim_{r\to 0}\frac{f(x_0+rcos(\theta),y_0+rsin(\theta))-f(x_0,y_0)}{r}$ (וכתזכורת.)

טענה: אם f גזירה אז יש נגזרת בכל כיוון וערכיה הוא $e^{i\theta}f'(z_0)$.

הוכחה: במונחים של מרוכבות אנחנו מחשבים את הגבול $e^{i\theta}f'(z_0)=\boldsymbol{e^{i\theta}}\lim_{r\to 0}\frac{f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0)}{\boldsymbol{re^{i\theta}}}$. כמו כן, עבור $r\to 0$ מתקבל $re^{i\theta}\to 0$ כי $|e^{i\theta}|=1$ כאשר $e^{i\theta}=cis(\theta)$. ההפך לא מתקיים, ואפשר לראות זאת ע"י הפונקציה הצמודה.

שאלה: נניח f'_θ לא תלויה ב-θ. האם אז f גזירה ב-z_0?

תשובה: זה ייתכן רק אם הקבוע הוא 0 כי צריך שיתקיים $c=e^{i\theta}f'(z_0)$ ואז $f'(z_0)=e^{-i\theta}c$ לכל θ. נותר לנו רק לשאול:

שאלה: נניח ש-$f'_\theta=0$, לכל θ. האם f גזירה ב-z_0?

תשובה: לא!!! נביט ב-$f(z)=\begin{Bmatrix}x\,, z=x+ix^2\\ 0\,, else\end{Bmatrix}$ אם f גזירה ב-θ בהכרח ש-$f'(z_0)=0$. אבל $\lim_{x+ix^2\to 0}\frac{f(x+ix^2)-f(0)}{x+ix^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+ix^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+ix}=1\neq 0$. ☹ (בנוסף, משוואות קושי רימן לא מתקיימות).

<u>טורים של מספרים מרוכבים</u>:

1. עבור $z_n=x_n+iy_n$ הסכום $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ מוגדר להיות קיים אם קיים $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}z_n$.
קל לקרות שהסכום קיים אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty}x_n=s_x, \sum_{n=1}^{\infty}y_n=s_y$. ואז $S=s_x+s_y$.
2. $\sum_1^\infty z_n$ נקרא מתכנס בהחלט אם $\sum|z_n|$ מתכנס.

קל לראות: $\sum z_n$ מתכנס בהחלט או"א $\sum x_n, \sum y_n$ מתכנסים בהחלט כי $|x_n|, |y_n| \le |z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \le$ $|x_n| + |y_n|$. מתקיים $\sum |z_1| < \infty$ ולכן $\sum z_n$ קיים. כי אז $\sum |y_n|, \sum |x_n| < \infty$ ואז $\sum x_n, \sum y_n$ קיימים ואז $\sum x_n, \sum i y_n$ קיימים. ואז ברור ש $\sum z_n = \sum (x_n + i y_n)$ קיים.

טור מתכנס בהחלט של ממשיים נותן לסכום בכל סדר. זה נכון גם למרוכבים כי שינוי סדר פירושו $\sum z_{\sigma(n)}$ כאשר $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל, $\sum_{n=1}^{N} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{N} x_{\sigma(n)} + i y_{\sigma(n)}$ וצד ימין מתכנס ע"פ משפטים מאינפי 1.

באופן כללי, אפשר לומר, שכל מה שנכון בממשיים בהקשר זה נכון גם במרוכבים.

נעבור לפונקציה הכי חשובה, הכי סקסית, בכל המתמטיקה:

<u>פונקציית האקספוננט:</u>

מוגדרת להיות כך: $f(z) = \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. זהו טור מתכנס בהחלט שכן $\sum \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|}$.

טענה: לכל z_1, z_2 מתקיים $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

הוכחה: $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!} \overset{\text{כפל טורים ע"פ קושי}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \frac{z_2^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} n! \frac{z_1^k z_2^l}{k! l!} =$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}$. מ.ש.ל. ■

טענה: מתקיים גם $e^z = e^x \operatorname{cis}(y)$ (עבור z=x+iy)

הוכחה: ידוע כי $\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots, i\sin(y) = i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)$. נציב הכל יחד, ונקבל את הביטוי $e^x \left(\sum_{\text{זוגיים החל מאפס}} \frac{(-y)^i}{i!} + i \sum_{\text{אי זוגיים החל מאחד}} \frac{(-y)^j}{j}\right) = e^x \left(1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} \ldots\right) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} =$ $e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$. מ.ש.ל. ■