

תרגיל - טורים חיוביים

1. הוכיחו/הפריכו:

- א. אם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר.
- ב. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם $\sum a_n^2$ מתכנס.
- ג. יהי טור חיובי $\sum a_n$. אם הטור החיובי $\sum a_n^2$ מתכנס, אזי גם $\sum a_n$.
- ד. יהי טור חיובי $\sum a_n$ כך ש $\forall n: \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. אזי $\sum a_n$ מתבדר.
- ה. יהי טור חיובי $\sum a_n$ כך ש $\forall n: \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אזי $\sum a_n$ מתכנס.

2. הוכיחו:

- א. אם הטורים $\sum a_n^2$ ו $\sum b_n^2$ מתכנסים אזי הטור $\sum |a_n b_n|$ מתכנס.
- ב. אם הטור $\sum a_n^2$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{|a_n|}{n}$ מתכנס.
- ג. הטור החיובי $\sum a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

3. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{10^n}$

4. חשבו את סכומי הטורים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$

5. קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים או לא (והוכיחו):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} \quad .ה.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1} \quad .ו.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n} \quad .ז. \text{ עבור } a > 0 \text{ קבוע.}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad .ח.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad .ט.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad .י.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \quad .יא.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n!)^2}} \quad .יב.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \quad .יג.$$

$$** \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) \quad .יד.$$

$$** \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n} \quad .יט.$$