פתרון תרגיל בית 10 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1. מצאו בעזרת משפט קיילי שיכון $\varphi\colon U_8 \to S_4$ וכתבו אותו באופן מפורש.

פתרון. אנחנו יודעים כי $U_8 = \{1,3,5,7\}$ לפי תרגיל בית 3. ניתן לכל איבר שם חדש

$$1 \mapsto 1, \qquad 3 \mapsto 2, \qquad 5 \mapsto 3, \qquad 7 \mapsto 4$$

ברור ש-1 נשלח ל-$\mathrm{id} \in S_4$. לשאר האיברים נעזר בטבלת הכפל שחישבנו בעבר, כדי לחשב לאן שאר האיברים נשלחים. למשל כפל משמאל ב-3 שולח את 1 ל-3 ולכן התמורה שאליה נשלח את 3 תעביר את 1 ל-2. חישוב סופי:

$$1 \mapsto \mathrm{id}, \qquad 3 \mapsto (12)(34), \qquad 5 \mapsto (13)(24), \qquad 7 \mapsto (14)(23)$$

שאלה 2. הוכיחו את האיזומורפיזמים הבאים באמצעות משפט האיזומורפיזמים הראשון (או בכל דרך אחרת):

א. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \Omega_\infty$.

ב. $\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle$.

ג. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(2,2)\rangle$.

פתרון.

א. נגדיר העתקה $f\colon \mathbb{Q} \to \Omega_\infty$ לפי $f(r) = e^{2\pi i r}$. שימו לב שלכל $r \in \mathbb{Q}$ אכן $f(r) \in \Omega_\infty$: אם נרשום $r = \frac{m}{n}$, אז $f(r)^n = e^{2\pi i m} = 1$, ולכן $f(r) \in \Omega_n \subseteq \Omega_\infty$. שימו לב שזו אותה ההעתקה שהשתמשנו בה בתרגול על מנת להוכיח $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$; לכן f הומומורפיזם ו-$\ker f = \mathbb{Z}$. כמו כן, ההעתקה f על כי לכל $z \in \Omega_\infty$ קיים איזשהו $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $z \in \Omega_n$, כלומר $z = e^{\frac{2\pi i m}{n}} = f(\frac{m}{n})$ לאיזשהו $0 \le m < n$. בסך הכל, ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את הדרוש.

ב. נשים לב כי $\langle(1,1)\rangle = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, כלומר אנחנו מחלקים בתת־החבורה האלכסונית. נגדיר העתקה $f\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ לפי $f(m,n) = m-n$. קל לוודא כי f הומומורפיזם. כמו כן, מהגדרתה $\ker f = \langle(1,1)\rangle$, ו-$f$ על כי $f(m,0) = m$ לכל $m \in \mathbb{Z}$. בסך הכל, ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle$.

ג. הפעם $\langle(2,2)\rangle = \{(2n,2n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. כלומר מצד אחד שתי הקואורדינטות שוות, ומצד שני שתיהן חייבות להיות זוגיות. אז נגדיר העתקה $g\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ לפי $g(m,n) = (m-n, m \pmod 2)$. גם פה קל לוודא ש-$g$ הומומורפיזם וש-$\ker g = \langle(2,2)\rangle$. כדי לוודא ש-$g$ על, נחלק למקרים:

- אם m זוגי, אז $f(m,0) = (m,0)$ ו-$f(m+1,1) = (m,1)$;
- אם m אי-זוגי, אז $f(m,0) = (m,1)$ ו-$f(m+1,1) = (m,0)$.

בסך הכל ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(2,2)\rangle$.

שאלה 3. מצאו את כל התמונות האפימורפיות של D_7.

פתרון. D_7 היא חבורה מסדר 14, ולכן לפי לגראנז' הסדר של כל תת־חבורה שלה חייב להיות מבין $\{1,2,7,14\}$. נעבור על כל סדר, ונמצא את תת־החבורות הנורמליות של D_7:

א. סדר 1 – זו $\{\mathrm{id}\}$, והמנה היא $D_7/\{\mathrm{id}\} \cong D_7$.

ב. סדר 2 – כל תת־חבורה כזו חייבת להיות תת־חבורה שנוצרת על ידי איבר מסדר 2 ב-D_7 (כי כל חבורה מסדר ראשוני היא ציקלית). האיברים מסדר 2 ב-D_7 הם $\tau\sigma^i$ לכל $0 \le i \le 6$, ואילו האיברים מן הצורה σ^i הם מסדר המחלק את 7. נראה שתת־החבורה ש-$\tau\sigma^i$ יוצר אינה נורמלית ב-D_7, כלומר $\langle\tau\sigma^i\rangle = \{\mathrm{id}, \tau\sigma^i\} \ntrianglelefteq D_7$ לכל $0 \le i \le 6$. אכן, נשים לב כי $\sigma(\tau\sigma^i)\sigma^{-1} = \sigma\tau\sigma^{i-1} = \tau\sigma^{i-2} \notin \{\mathrm{id}, \tau\sigma^i\}$.

ג. סדר 7 – בדומה, צריך לבחור איבר מסדר 7 ב-D_7. האיברים מסדר 7 ב-D_7 הם σ^i לכל $1 \le i \le 6$, והם יוצרים את אותה תת־החבורה $\langle\sigma\rangle$. זו תת־חבורה נורמלית ב-D_7, כי היא מאינדקס 2, ומתקיים $D_7/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}_2$ (כי זו החבורה היחידה מסדר 2 עד כדי איזומורפיזם).

ד. סדר 14 – זו כל D_7, ומתקיים $D_7/D_7 \cong \{e\}$.

בסך הכל, התמונות האפימורפיות של D_7 הן $D_7, \mathbb{Z}_2, \{e\}$.

שאלה 4. נתבונן בתת־החבורה $K_4 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \le S_4$, הנקראת גם חבורת הארבעה של קליין. ודאו כי אתם מבינים מדוע $K_4 \lhd S_4$. בשאלה זו נוכיח כי $S_4/K_4 \cong S_3$ בשלוש דרכים שונות.

א. <u>הוכחה ישירה:</u> הראו שבכל מחלקה (שמאלית) של K_4 ב-S_4 יש נציג יחיד σ כך ש-$\sigma(4) = 4$, והגדירו באמצעות הנציגים האלו את האיזומורפיזם הדרוש.

ב. <u>על ידי פעולות:</u> החבורה S_4 פועלת על מחלקת הצמידות של $(1\ 2)(3\ 4)$ על ידי הצמדה. הראו שהפעולה הזו מגדירה הומומורפיזם $S_4 \to S_3$, שהגרעין שלו הוא K_4.

ג. <u>על ידי תכונות של S_4/K_4:</u> הוכיחו כי S_4/K_4 היא חבורה לא אבלית מסדר 6. כיוון ש-S_3 היא החבורה היחידה מסדר 6 שאינה אבלית (עד כדי איזומורפיזם), הסיקו כי $S_4/K_4 \cong S_3$.

פתרון.

א. <u>הוכחה ישירה:</u> נטען שבכל מחלקה $\sigma K_4 \in S_4/K_4$ יש נציג שמקבע את 4. אכן, אם $\sigma(i) = 4$, נבחר $\tau \in K_4$ כך ש-$\tau(4) = i$, ונקבל $\sigma\tau(4) = \sigma(i) = 4$ כאשר $\sigma\tau \in \sigma K_4$. מצד שני, כיוון ש-$|K_4| = 4$, נקבל $[S_4 : K_4] = 6 = |S_3|$. זה מראה שהנציג שצוין יחיד.
נבנה פונקציה $f\colon S_4/K_4 \to S_3$ באופן הבא: לכל $\sigma K_4 \in S_4/K_4$, נגדיר את $f(\sigma)$ להיות התמורה היחידה ב-σK_4 שמקבעת את 4. הפונקציה הזו מוגדרת היטב, חח"ע ועל מההסבר שכתבנו. היא הומומורפיזם כי ההרכבה ב-S_4 של הנציגים מזדהה עם ההרכבה ב-S_3, ובסך הכל f היא האיזומורפיזם הדרוש.

ב. <u>על ידי פעולות:</u> S_4 פועלת על כל מחלקת צמידות על ידי הצמדה, ובפרט על מחלקת הצמידות של זוגות חילופים זרים $C = \{(**)(**)\}$, שהיא מגודל 3. לכן מוגדר הומומורפיזם $f\colon S_4 \to S_3$. קל לראות כי $K_4 \subseteq \ker f$, שהרי $C \subseteq K_4$, ו-K_4 היא חבורה אבלית.
כדי להראות כי $\ker f = K_4$, נשים לב כי $\ker f = C_{S_4}(K_4) = \bigcap_{\sigma\in K_4} C_{S_4}(\sigma)$, כלומר זהו המְרַכֵּז של כל K_4. ממשפט מסלול-מייצב, לכל $\mathrm{id} \ne \sigma \in K_4$ קל לראות כי

$$|C_{S_4}(\sigma)| = \frac{|S_4|}{|\mathrm{conj}(\sigma)|} = \frac{24}{3} = 8\ .$$

עם זאת, $C_{S_4}((1\,2)(3\,4)) \neq C_{S_4}((1\,3)(2\,4))$: למשל $(1\ 3\ 2\ 4) \in C_{S_4}((1\,2)(3\,4))$ אבל $(1\ 3\ 2\ 4) \notin C_{S_4}((1\,3)(2\,4))$. ממשפט לגראנז', הסדר של החיתוך $C_{S_4}(K_4) = \bigcap_{\sigma\in K_4} C_{S_4}(\sigma)$ חייב לחלק את 8, אך לפי מה שהראינו לא יכול להיות 8, ולכן הוא לכל היותר 4.

כיוון ש-$K_4 \subseteq C_{S_4}(K_4)$, נקבל $\ker f = C_{S_4}(K_4) = K_4$. ממשפט האיזומורפיזם הראשון, $S_4/K_4 \cong \operatorname{im} f$, שהיא תת־חבורה מסדר 6 של S_3, ולכן $\operatorname{im} f = S_3$, כנדרש.

ג. <u>על ידי תכונות של S_4/K_4:</u> אנחנו יודעים כי $|S_4/K_4| = \frac{|S_4|}{|K_4|} = \frac{24}{4} = 6$. נטען כי S_4/K_4 אינה אבלית. אכן, נשים לב כי

$$\begin{aligned}((1\,2)K_4)\,((2\,3)K_4) &= (1\,2)(2\,3)K_4 = (1\,2\,3)K_4 = \\ &= \{(1\,2\,3),(1\,3\,4),(2\,4\,3),(1\,4\,2)\}\end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned}((2\,3)K_4)\,((1\,2)K_4) &= (2\,3)(1\,2)K_4 = (1\,3\,2)K_4 = \\ &= \{(1\,3\,2),(2\,3\,4),(1\,2\,4),(1\,4\,3)\}\end{aligned}$$

ואלו מחלקות שונות. לכן S_4/K_4 היא חבורה לא אבלית מסדר 6. החבורה היחידה שמקיימת את התכונות האלו היא S_3, ולכן $S_4/K_4 \cong S_3$.

שאלה 5. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$. ראיתם במשפט האיזומורפיזמים הרביעי (משפט ההתאמה) את הקשר בין תת־חבורות של ${}^{G}\!/_{H}$ לבין תת־חבורות של G המכילות את H.

א. הוכיחו שאם $K_1, K_2 \in G$ תת־חבורות המכילות את H, אז

$$(K_1/H) \cap (K_2/H) = (K_1 \cap K_2)\,/H$$

ב. מכך שאנו יודעים שתת־החבורה הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-K_1 וב-K_2 היא $K_1 \cap K_2$, נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $(K_1 \cap K_2)\,/H$.

פתרון.

א. זה ממש לפי משפט ההתאמה. ההכלה הדו־כיוונית בפירוט:

$$\begin{aligned}xH \in (K_1/H) \cap (K_2/H) &\Leftrightarrow \\ xH \in (K_1/H) \wedge xH \in (K_2/H) &\Leftrightarrow \\ x \in K_1 \wedge x \in K_2 &\Leftrightarrow \\ x \in K_1 \cap K_2 &\Leftrightarrow \\ xH \in (K_1 \cap K_2)\,/H &\Leftrightarrow\end{aligned}$$

ב. לפי הסעיף הקודם נסיק ש-$(K_1 \cap K_2)\,/H$ היא תת־החבורה הגדולה ביותר של G/H המוכלת ב-K_1/H וב-K_2/H.

שאלה 6. תהי G חבורה מסדר n, ויהי $\varphi\colon G \to S_n$ שיכון קיילי. הוכיחו ש-$g \in G$ הוא מסדר m אם ורק אם $\varphi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים.

פתרון. בכיוון אחד, נניח ש-g מסדר m. לכן $g^m = e_G$ וגם $g^i \neq e_G$ לכל $0 < i < m$. יהי $x \in G$ כלשהו. שימו לב שגודל הקבוצה $\{x, gx, g^2x, g^3x, \dots\}$ הוא m, מכיוון שלכל $0 \leq i < j < m$, נקבל $g^ix \neq g^jx$. כלומר, המסלול של כל איבר הוא מסדר m. לכן g

יוצר חלוקה של איברי החבורה ל-$\frac{n}{m}$ מסלולים מגודל m. אפשר לשים לב כי האיברים בכל מחזור כזה הם איברי מחלקה ימנית של תת־החבורה $\langle g\rangle$.

הכיוון השני קל יותר, מכיוון שסדר של איברים נשמר תחת שיכון. כלומר $o(g) = o(\varphi(g))$. הסדר של $\varphi(g)$ הוא כמ"מ אורכי המחזורים בהצגה של התמורה כמכפלת מחזורים זרים, ואצלנו זה $\mathrm{lcm}(m,\ldots,m) = m$, לפי הנתון.

שאלה 7. בבנייה של שיכון קיילי בחרנו שמות לאיברים של G, והתאמנו כל $g \in G$ לתמורה שהוא מגדיר ביחס לשמות שבחרנו. הראו שאם היינו בוחרים את השמות באופן שונה, שני השיכונים שמתקבלים היו צמודים זה לזה.

במפורש: נכתוב $G = \{g_1,\ldots,g_n\} = \{g_1',\ldots,g_n'\}$. יהי $\varphi\colon G \hookrightarrow S_n$ שיכון קיילי ביחס לבחירת השמות $\{g_1,\ldots,g_n\}$, ויהי $\psi\colon G \hookrightarrow S_n$ שיכון קיילי ביחס לבחירת השמות $\{g_1',\ldots,g_n'\}$. הוכיחו כי תת־החבורות $\varphi(G)$ ו-$\psi(G)$ של S_n צמודות. בפירוט: הראו שקיימת $\sigma \in S_n$ שעבורה לכל $g \in G$ מתקיים $\psi(g) = \sigma\circ\varphi(g)\circ\sigma^{-1}$.

(הדרכה: קיימת $\sigma \in S_n$ כך ש-$g_i' = g_{\sigma(i)}$ לכל $1 \le i \le n$).

פתרון. נבחר $\sigma \in S_n$ כך ש-$g_i' = g_{\sigma(i)}$ לכל $1 \le i \le n$. נרצה להראות כי $\psi(g) = \sigma\circ\varphi(g)\circ\sigma^{-1}$.

יהי $g \in G$. ניזכר בהגדרת שיכון קיילי: השיכון $\varphi\colon G \hookrightarrow S_n$ שולח את g לתמורה $\varphi(g) = \tau \in S_n$ כך שלכל $1 \le i \le n$, $gg_i = g_{\tau(i)}$; בדומה, השיכון $\psi\colon G \hookrightarrow S_n$ שולח את g לתמורה $\psi(g) = \pi \in S_n$ כך שלכל $1 \le i \le n$, $gg_i' = g_{\pi(i)}'$. אך מהגדרת σ, נקבל שאת השוויון האחרון אפשר לכתוב בצורה $gg_{\sigma(i)} = g_{\sigma\pi(i)}$; נחליף $j = \sigma(i)$ ונקבל את השוויון $g_{\tau(j)} = gg_j = g_{\sigma\pi\sigma^{-1}(j)}$ לכל $1 \le j \le n$ ולכן $\tau = \sigma\pi\sigma^{-1}$, כנדרש.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה שלחו לנו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. יהיו G_1, G_2 חבורות, תהי $N \lhd G_1$ תת־חבורה נורמלית, ויהי $f\colon G_1 \to G_2$ הומומורפיזם. נסמן על ידי $\rho\colon G_1 \to G_1/N$ את ההטלה הטבעית $\rho(g) = gN$. הוכיחו כי קיים הומומורפיזם $\hat{f}\colon G_1/N \to G_2$ כך ש-$f = \hat{f}\circ\rho$ אם ורק אם $N \subseteq \ker f$.

בהצלחה!