

פיתרון לתרגיל מספר 6

תשובה 1:

א. צריך שלכל היותר הנבדק ה-4 יתאים כי אחרת הנפגע ימות ($2 + 4 \cdot 2 = 10 \text{ min}$).
יהי X – מס' הנבדקים עד לנבדק המתאים. לכן:

$$X \sim \text{Geom}(0.4) \Rightarrow P(X \leq 4) = \sum_{i=0}^3 (0.6)^i \cdot (0.4) = 0.87$$

ב. נסמן ב- Y את מספר התורמים (לכן מספר "הכשלונות הוא $Z = Y - 2$)

$$P(O) = \frac{1}{3} = 0.33$$

$$Z = Y - 2 \sim \text{NB}(2, 0.33) \Rightarrow P(Y = 4) = P(Z = 2) = \binom{4-1}{2-1} 0.33^2 \cdot 0.66^2 = 0.142$$

ג.

$$P(A) = 0.5$$

$$0.99 < P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) \Rightarrow P(Z = 0) = 0.01$$

$$Z \sim \text{Bin}(1, 0.5) \Rightarrow 0.01 > \binom{1}{0} 0.5^1 = 0.5 \Rightarrow$$

$$n > \frac{\ln 0.01}{\ln 0.5} = 6.643 \Rightarrow n \geq 7$$

תשובה 2:

לפי נוסחת ההסתברות השלמה $P(Y = k) = \sum_n B(n, 0.5) \cdot P(X = n)$

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1} p \quad \text{עתה, } B(n, 0.5) = \binom{n}{k} 0.5^k (1-0.5)^{n-k} = \binom{n}{k} 0.5^n$$

$$P(Y = k) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{k} 0.5^n \cdot (1-p)^{n-1} p$$

לכן נקבל ש

תשובה 3:

$$P(X = x) = \frac{\binom{20}{x} \binom{10}{5-x}}{\binom{30}{5}} \quad X \sim \text{HG}(5; 20, 10) \quad \text{זאת אומרת שעבור } 0 \leq x \leq 5 \text{ מתקיים:}$$

תשובה 4:

$$P(X = 9) = (0.75)^8(0.25) = 0.02502 \quad (\alpha)$$

(ב)

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= 1 - [P(X = 4) + P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1)] \\ &= 1 - (0.75)^3(0.25) - (0.75)^2(0.25) - (0.75)(0.25) - (0.25) = 0.5664 \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.25} = 4 \quad (\gamma)$$

תשובה 5:

כאשר n גדול ו- p קטן אזי ניתן לקרב את ההתפלגות הבינומית להתפלגות פואסון כאשר $\lambda = np$.

במקרה זה יש לנו 10,000 ניסויים בודדים (n), בכל אחד ההסתברות להצלחה $p = \frac{20}{10000}$ כלומר

$$X \sim Bin\left(10000, \frac{20}{10000}\right)$$

וכיוון שזה דיי מטורף לחשב את כל העניין פשוט נשתמש בקירוב:

$$\lambda \cong np = 10000 \cdot \frac{20}{10000} = 20$$

נסמן ב- λ את מספר הפורשים משירות בחודש ולכן:

$$P(X = 30) = \frac{e^{-20} 20^{30}}{30!} \approx 0.008$$

תשובה 6:

א. יהי X מספר ההימורים עד לזכייתה הרביעית של המהמרת. ויהי Y מספר ההפסדים עד לזכייתה הרביעית של המהמרת. Y הוא מ"מ בינומי שלילי עם הפרמטרים 4 ו- $\frac{18}{38}$. כמו כן

מתקיים $Y = X - 4$ ולכן ההסתברות שתהמר 9 פעמים בסה"כ היא

$$P(X = 9) = P(Y = 4) = \binom{8}{3} \left(\frac{18}{38}\right)^4 \left(\frac{20}{38}\right)^5 \approx 0.1139$$

ב. יהי W הרווח של המהמרת ויהי X מספר ההימורים שהשתתפה בהם עד לזכייתה הרביעית. מכיוון שהמהמרת זוכה 4 פעמים בסה"כ לכן מפסידה $Y = X - 4$ בסה"כ (מ"מ בינומי שלילי).

$$W = 4 \cdot 5 - (X - 4) \cdot 5 = 20 - 5Y$$

$$E(W) = 20 - 5E(Y) = 20 - 5 \cdot \frac{4(1 - \frac{18}{38})}{\frac{18}{38}} = 20 - \frac{200}{9} = -\frac{20}{9} \quad \text{לכן}$$

תשובה 7:

נסמן ב A את המאורע שהסוחר רוכש חבילה. לכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(A|4 \text{ רכיבים פגומים}) \cdot 0.3 + P(A|\text{רכיב פגום}) \cdot 0.7 =$$

$$= \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{3}{10} + \frac{\binom{1}{0} \binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{7}{10} = \frac{54}{100}$$

כלומר הסוחר אינו רוכש 46% מהחבילות שבדק.

תשובה 8:

א. נסמן ב-E את המאורע בו סוללה תפעל יותר מ-13 ימים. ונסמן ב- X_A את אורך החיים של סוללה שנבחרה מקרית ממפעל A. לפי הנתון $X_A \sim G(\frac{1}{20})$ ולכן,

$$P(E|A) = P(X_A > 13) = \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{13} = 0.513$$

באופן דומה נגדיר את X_B באשר $X_B \sim G(\frac{1}{15})$ ולכן $P(E|B) = P(X_B > 13) = \left(1 - \frac{1}{15}\right)^{13} = 0.408$

ואת X_C באשר $X_C \sim G(\frac{1}{12})$ ולכן $P(E|C) = P(X_C > 13) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{13} = 0.323$

ולכן לפי נוסחת ההסתברות השלמה, $P(E) = 0.513 \cdot \frac{1}{2} + 0.408 \cdot \frac{1}{6} + 0.323 \cdot \frac{1}{3} = 0.4322$

$$P(A|E) = \frac{P(X_A > 13) \cdot P(A)}{P(E)} = \frac{0.513 \cdot \frac{1}{2}}{0.4322} = 0.594 \quad \text{ב. לפי נוסחת בייס:}$$