בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ו סמסטר קיץ מועד א

מרצים: ד"ר ארז שיינר וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 23 נקודות, לכן יש סה"כ **115** נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

שאלה 1

סעיף א (10 נקודות)

נגדיר קשר לוגי nand באופן הבא: $p\uparrow q\equiv\neg(p\wedge q)$.
רשמו את פסוקים שקולים לפסוקים הבאים באמצעות הקשר לוגי nand בלבד:

i. $\neg p$.

ii. $p\wedge q$.

סעיף ב (13 נקודות)

תהיינה: $B\subseteq A\neq\varnothing$ שתי קבוצות. יהי R יחס מעל $P(A)$, המוגדר באופן הבא: $\forall X,Y\in P(A): XRY\Leftrightarrow X\cup B=Y\cup B$.

i. הוכיחו כי R יחס שקילות מעל $P(A)$.

ii. עבור: $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2\}$ כתבו בצורה מפורשת את $\left[\{3,4\}\right]_R$.

iii. עבור הקבוצות מסעיף קודם, מצאו את גודל קבוצת המנה $|P(A)/R|$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

<u>פתרון שאלה 1</u>

<u>סעיף א1</u>

$\neg p\equiv\neg(p\wedge p)\equiv p\uparrow p$.

<u>סעיף א2</u>

$$p\wedge q\equiv\neg(\neg(p\wedge q))\equiv\neg(p\uparrow q)\equiv(p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$$

<u>סעיף ב1</u>

רפלקסיביות: לכל $X\in P(A)$ מתקיים $X\cup B=X\cup B$, ולכן XRX.

סימטריות: $XRY\Leftarrow X\cup B=Y\cup B\Leftarrow X\cup B=Y\cup B\Leftarrow YRX$.

טרנזטיביות:

$$XRY\wedge YRZ\Leftarrow(X\cup B=Y\cup B)\wedge(Y\cup B=Z\cup B)\Leftarrow X\cup B=Z\cup B\Leftarrow XRZ$$

סעיף ב2

$\{3,4\} \cup B = \{1,2,3,4\}$ **ולכן** $\left[\{3,4\}\right]_R = \left\{X \in P(A) \middle| X \cup B = \{1,2,3,4\}\right\}$

$$\left[\{3,4\}\right]_R = \left\{\{3,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\right\}$$

סעיף ב3

נמצא את כל מחלקות השקילות השונות:

$$[\phi]_R = \left\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\right\}$$
$$\left[\{3,4\}\right]_R = \left\{\{3,4\},\{2,3,4\},\{1,3,4\},\{1,2,3,4\}\right\}$$
$$\left[\{3\}\right]_R = \left\{\{3\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,2,3\}\right\}$$
$$\left[\{4\}\right]_R = \left\{\{4\},\{2,4\},\{1,4\},\{1,2,4\}\right\}$$

ישנן 4 מחלקות שקילות שונות, ולכן $|P(A)/R| = 4$

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

שאלה 2

סעיף א (10 נקודות)

תהיי $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציה **על** ותהיי $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציה המקיימת $f(n)=g(3n+1)$. הוכיחו ש g **לא חח"ע**.

סעיף ב (13 נקודות)

תהי קבוצה A ויהיו R,S יחסי סדר חלקיים על A.
הוכיחו/הפריכו כי:

i. $R\cup S$ יחס סדר חלקי על A.
ii. $R\cap S$ יחס סדר חלקי על A.
iii. R/S <u>אינו</u> יחס סדר חלקי על A.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

f פונקציה על, ולכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ המקיים $f(n_0)=g(1)$. קיבלנו ש $g(3n_0+1)=g(1)$ אבל לא קיים $n_0\in\mathbb{N}$ שעבורו מתקיים $3n_0+1=1$.

<u>סעיף ב1</u>

לא נכון

דוגמה נגדית

$$A=\{1,2,3\},\ R=\{(1,1),(2,2),(3,3)(1,2),(2,3),(1,3)\}$$
$$S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$$
$$R\cup S=\{(1,1),(2,2),(3,3)(1,2),(2,3),(1,3),(2,1),(3,1),(3,2)\}$$

$R\cup S$ לא יחס סדר חלקי כי $(1,2)\in R\cup S\wedge(2,1)\in R\cup S$ אבל $1\neq 2$.

<u>סעיף ב2</u>

נכון

הוכחה

רפלקסיביות: יהי $a\in A$. (A,R) קבוצה סדורה חלקית, ולכן $(a,a)\in R$.
(A,S) קבוצה סדורה חלקית, ולכן $(a,a)\in S$.
סה"כ קיבלנו ש $(a,a)\in R\cap S$

טרנזטיביות: נניח ש $(a,b)\in R\cap S\wedge(b,c)\in R\cap S$.

$(a,b)\in R\cap S\wedge(b,c)\in R\cap S\rightarrow((a,b)\in R\wedge(a,b)\in S)\wedge((b,c)\in R\wedge(b,c)\in S)$

$((a,b)\in R\wedge(b,c)\in R)\wedge((a,b)\in S\wedge(b,c)\in S)$

R,S יחסים טרנזטיביים, ולכן $(a,c)\in R\wedge(a,c)\in S$ $\leftarrow$ $(a,c)\in R\cap S$.

אנטי סימטריות

נניח ש $(a,b)\in R\cap S\wedge(b,a)\in R\cap S\rightarrow(a,b)\in R\wedge(b,a)\in R$

R יחס אנטי סימטרי ולכן $a=b$.

<u>סעיף ב3</u>

לכל $A\neq\phi$ זה נכון. יהי $a\in A$ אז מהרפלקסיביות של יחס סדר חלקי מתקיים $(a,a)\in R\wedge(a,a)\in S$ ולכן $(a,a)\notin R\setminus S$ ולכן $R\setminus S$ אינו רפלקסיבי ואינו יחס סדר חלקי.

<u>אבל</u> אם $A=\phi$ אז $R=S=R\setminus S=\phi$ הוא יחס סדר חלקי, ולכן מדובר **בהפרכה.**

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

שאלה 3 (23 נקודות)

לכל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו האם עוצמתה היא $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}, 2^{2^{\aleph}}$.
נמקו.

א. A היא קבוצת כל הישרים במישור בעלי שיפוע חיובי.

ב. A היא קבוצת כל הישרים במישור בעלי שיפוע חיובי העוברים דרך הראשית.

ג. $A=\left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \middle| \forall x\in\mathbb{R}: -1\le f(x)\le 5 \right\}$.

ד. $A=\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

לכל מספר ממשי חיובי נתאים שיפוע.
לכל ישר בעל שיפוע מסוים נתאים את שיעור ה y של נקודת החיתוך שלו עם ציר ה y. קיבלנו פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה $\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}$ לקבוצת הישרים.
העוצמה היא $\aleph$.

<u>סעיף ב</u>

לכל מספר ממשי חיובי נתאים שיפוע.
קיבלנו פונקציה חח"ע ועל מהקבוצה $\mathbb{R}^{+}$ לקבוצת הישרים.
העוצמה היא $\aleph$.

<u>סעיף ג</u>

העוצמה של הקבוצה $A=\left\{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \middle| \forall x\in\mathbb{R}: -1\le f(x)\le 5 \right\}$ שווה ל $[-1,5]^{\mathbb{R}}$
.

$\aleph^{\aleph}=\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph}=2^{\aleph_0\cdot\aleph}=2^{\aleph}$.

<u>סעיף ד</u>

$$A=\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}\times\mathbb{N}^{\left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\right)}=\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\left(\aleph_0^{\aleph_0}\right)}=\aleph_0^{\aleph_0\cdot\aleph_0}\cdot\aleph_0^{\aleph}=\aleph_0^{\aleph_0+\aleph}=\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$$

דף נוסף לשאלה מספר ____________

שאלה 4

סעיף א (16 נקודות)

תהי קבוצה A, הוכיחו כי $|P(A)|>|A|$ (כלומר $|P(A)|\geq|A|$ וגם $|P(A)|\neq|A|$).

סעיף ב (7 נקודות)

תהיינה קבוצות A,B,C כך ש $B\cup C=A$.
הוכיחו/הפריכו: $|P(B)|\cdot|P(C)|=|P(\mathrm{A})|$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u> – הוכחה מההרצאה.

<u>סעיף ב</u>
אם הקבוצות היו זרות, כלומר $B\cap C=\phi$ היה מדובר בהוכחה.
הרי במקרה זה מתקיים $|B\cup C|=|B|+|C|$, ולכן
$$|P(B)|\cdot|P(C)|=2^{|B|}\cdot 2^{|C|}=2^{|B|+|C|}=2^{|B\cup C|}=|P(B\cup C)|=|P(A)|$$

אבל לא נתון שהקבוצות זרות, ולכן זו הפרכה.
למשל, $A=B=C=\{1\}$. $|P(A)|=|P(\mathrm{B})|=|P(\mathrm{C})|=2$ אך $2\cdot 2\neq 2$.

דף נוסף לשאלה מספר ____________________

שאלה 5

<u>הגדרה</u>: גרף נקרא K-צביע אם בהינתן K צבעים שונים ניתן לצבוע כל קודקוד בגרף, כך שלא תהיה קשת בין אף שני קודקודים באותו צבע.

סעיף א (6 נקודות)
הוכיחו/הפריכו: לכל $n\in\mathbb{N}$, אם G גרף קשיר עם n קודקודים וn קשתות,
אזי G הינו 2-צביע.

סעיף ב (17 נקודות)
יהי גרף קשיר G עם n קודקודים וn קשתות. הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי G הינו 3-צביע.

<u>פתרון שאלה 5</u>

<u>סעיף א</u>
עבור $n=3$ הגרף היחיד עם 3 קודקודים ו3 צלעות הוא המשולש.
נבחר שני צבעים, למשל כחול ולבן. נצבע קודקוד מסויים בכחול. כיוון ששני הקודקודים האחרים מחוברים אליו, עלינו לצבוע אותם בהכרח בלבן (אסור לצבוע שני קודקודים עם צלע משותפת באותו הצבע).
אך כעת שני הקודקודים הלבנים מחוברים, ולכן צביעה זו אינה חוקית.
כלומר אין דרך לצבוע את המשולש בשני צבעים באופן חוקי.

<u>סעיף ב</u>
עבור $n=0$ הטענה נכונה כיוון שאין קודקודים לצבוע, כלומר הצביעה הריקה עובדת.
עבור $n=1,2$ הטענה נכונה באופן ריק, כיוון שאין גרף עם קודקוד אחד וצלע ואין גרף עם שני קודקודים ושתי צלעות.
נראה בהמשך שאף אחד ממקרים אלה לא יכול להוות את הבסיס לאינדוקציה בדרך השנייה שנבחר בה, אך מתאימים להיות בסיס לאינדוקציה בדרך הראשונה.

<u>בסיס האינדוקציה</u>

עבור $n=3$ שוב אנו מקבלים את גרף המשולש. נצבע כל קודקוד בצבע שונה (יש לנו שלושה צבעים שונים) ולכן אין שני קודקודים בעלי אותו צבע, והצביעה היא בוודאי חוקית.

<u>שלב האינדוקציה</u>

כעת, נניח כי יהי $n\geq 3$ כך שכל גרף עם n צלעות וn קודקודים הוא 3-צביע.
עלינו להוכיח כי כל גרף עם $n+1$ קודקודים ו$n+1$ צלעות הוא 3-צביע.

יהי גרף כזה, נחלק למקרים:
אם קיים קודקוד בדרגה 1, נסיר אותו ואת הצלע שלו.
נקבל גרף **קשיר** עם n קודקודים וצלעות, ולכן לפי הנחת האינדוקציה הוא 3-צביע. חשוב לציין שהגרף קשיר כיוון שאף מסלול פשוט בין שני קודקודים שאינם הקודקוד שהסרנו, לא יכול לעבור דרך הקודקוד שהסרנו (כי זה ידרוש לעבור בצלע שהסרנו פעמיים – הלוך וחזור).

נצבע את הגרף כי אנחנו יודעים שזה אפשרי. נחזיר את הקודקוד שהסרנו ואת הצלע שלו, ונצבע את הקודקוד הזה בצבע שונה מהצבע של הקודקוד שהוא מחובר אליו וסיימנו.

כעת, נניח כי לא קיים קודקוד בדרגה 1. נציג שתי דרכים לפתור את השאלה:

<u>דרך I</u>

כיוון שהגרף קשיר, אין קודקוד מדרגה 0, לכן דרגות כל הקודקודים גדולות או שוות ל2. כלומר $\sum_{v\in V}\deg(v)\geq 2(n+1)$ אך כיוון שיש בגרף $n+1$ צלעות, לפי למת לחיצת הידיים מתקיים $\sum_{v\in V}\deg(v)=2(n+1)$.
לכן דרגת כל הקודקודים היא בדיוק 2 (אחרת $\sum_{v\in V}\deg(v)>2(n+1)$ בסתירה).

לכן קיים מעגל אוילר בגרף העובר בכל צלע בדיוק פעם אחת, ולכן גם בכל קודקוד בדיוק פעם אחת (כי דרגת כל קודקוד היא 2).
נצבע את הקודקוד הראשון במעגל בצבע הראשון, את הקודקוד הבא אחריו בצבע השני, את הבא אחריו בצבע השלישי, ולאחר מכן נחליף בין הצבע השני לשלישי לסירוגין.
כך בוודאות הקודקוד הלפני אחרון לא יצבע בצבע של הקודקוד האחרון הלא הוא גם הקודקוד הראשון.

בדרך זו יכלנו להשתמש כבסיס לאינדוקציה בכל אחד מהמקרים, כיוון שהפעם הראשונה שייתכן קודקוד מדרגה 1 היא גרף עם 4 קודקודים, ואילו הגרף עם 3 קודקודים הוא מעגל אוילר והוכחת צביעותו לא דורשת הנחת אינדוקציה על גרפים קודמים.

דרך II
נתחיל באופן דומה בהוכחה שדרגת כל הקודקודים היא 2, ונבחר קודקוד כלשהו *v*. נסמן את שני הקודקודים שמחוברים עליו כ*u,w*.
אם לא קיימת צלע בין *u,w*, נוסיף אותה, נסיר את *v* ושתי הצלעות שלו.
נשאר עם גרף **קשיר** כיוון שכל מסלול שעבר דרך *v* יכול כעת לעבור ישירות בין *u* ו*w*. בגרף הזה יש n קודקודים וצלעות, ולכן לפי הנחת האינדוקציה הוא 3-צביע.
נצבע אותו, כיוון שיש צלע בין *u,w* יש להם שני צבעים שונים, נחזיר את *v*, נצבע אותו בצבע השלישי, נחזיר את שתי הצלעות שלו ונסיר את הצלע בין *u,w* וקיבלנו צביעה חוקית של הגרף המקורי.

אם קיימת צלע בין *u,w* נסיר את *v* ואת שתי הצלעות שלו ונשאר עם גרף **קשיר**. זה נכון כיוון ששוב כל מסלול שעובר דרך *v* יכול לעבור ישירות דרך *u,w*.
כעת נוסיף **צלע כלשהי** ונקבל גרף עם n קודקודים וצלעות, ולכן 3-צביע.
מדוע אפשר להוסיף צלע כלשהי? לקודקוד אחד יש $n-1$ צלעות אפשריות. **כיוון ש**$n\geq 3$ ישנם שני קודקודים נוספים ואפשר לחבר גם

צלע בינהם. לכן סה"כ יש לפחות n צלעות אפשריות (בפועל יש הרבה יותר).

נצבע את הגרף החדש, נחזיר את v וצלעותיו ונצבע אותו בצבע שונה משל u,w, וקיבלנו צביעה חוקית.

דף נוסף לשאלה מספר ___________________

דף נוסף לשאלה מספר ___________________