פתרון תרגיל בית 12 – אינפי' 1

שאלה 1

גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $2^{x^e}\cdot e^{x^x}$

פתרון

$$\left[2^{x^e}\cdot e^{x^x}\right]'=\left[2^{x^e}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}\left[e^{x^x}\right]'=\left[e^{\ln 2^{x^e}}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[x^x\right]'=$$

$$=\left[e^{x^e\ln 2}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[e^{x\ln x}\right]'=2^{x^e}ex^{e-1}\ln 2\cdot e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}x^x\left[\ln x+1\right]=$$

$$2^{x^e}e^{x^x}\left[ex^{e-1}\ln 2+x^x\left[\ln x+1\right]\right]$$

ב. $\dfrac{\tan(e^{x^2})}{\sqrt{(\log x)^2+1}}$

פתרון

$$\left[\frac{\tan\left(e^{x^2}\right)}{\sqrt{(\log x)^2+1}}\right]'=\frac{\left[\tan\left(e^{x^2}\right)\right]'\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\left[\sqrt{(\log x)^2+1}\right]'}{(\log x)^2+1}=$$

$$\frac{\dfrac{2xe^{x^2}}{\left[\cos e^{x^2}\right]^2}\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\dfrac{2\log x}{2x\sqrt{(\log x)^2+1}}}{(\log x)^2+1}$$

שאלה 2

תהי $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. אנו יודעים כי יש לפונקציה זו אי רציפות סליקה ב0. האם הפונקציה המתקבלת לאחר סילוק אי הרציפות גזירה באפסּ? כלומר, האם $g(x)=\begin{cases}x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה באפס? (הוכח/הפרך לפי הגדרת הנגזרת)

הפרכה

נראה שלא קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=g'(0)$. הגבול הזה לא קיים

כי קיימות שתי סדרות $y_n=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}, x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ שתיהן שואפות לאפס

ושונות מאפס אך $f(x_n)\to 1, f(y_n)\to -1$ ולכן לא יכול להיות קיים גבול לפי היינה, ולכן הפונקציה אינה גזירה באפס.

מש"ל

שאלה 3

הוכיחו שלמשוואה $2x=\cos x$ יש פתרון יחיד.

פתרון

נגדיר את הפונקציה $h(x)=2x-\cos x$. פתרון למשוואה הנ"ל הוא כמובן אפס של h. כעת, $h(0)=-1<0$ וגם $h(1)=2-\cos(1)>0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים חייבת להיות נקודה $c\in(0,1)$ כך ש $h(c)=0$, כלומר קיים פתרון למשוואה.

נניח בשלילה שיש יותר מפתרון אחד, כלומר קיימים c_1,c_2 כך ש- $h(c_1)=h(c_2)=0$. לפי משפט רול קיימת נקודה c_3 כך ש $h'(c_3)=0$ אבל $h'(x)=2+\sin x>0$ בסתירה.

מש"ל

שאלה 4

הוכיחו שלכל $1\le a<b\le 2$ מתקיים $2\cdot(\ln b-\ln a)\le b^2-a^2$.

פתרון

יהיו $1\le a<b\le 2$. עלינו להוכיח ש- $2\cdot(\ln b-\ln a)\le b^2-a^2=(b-a)(b+a)$. שקול להוכיח ש- $\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\le\frac{b+a}{2}$. הפונקציה $\ln(x)$ גזירה ב- $(0,\infty)$ ובפרט גזירה ב $[a,b]$. לכן מתקיימים תנאי משפט הערך הממוצע של לגרנז'. עפ"י המשפט קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $\frac{1}{c}=\ln'(c)=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ (*). מתקיים $1\le a<c<b\le 2$ ולכן $a+b>2$ ומכאן $1>\frac{2}{a+b}>0$. $1\le a<c$ ולכן $c>1>\frac{2}{a+b}$. מכאן $\frac{a+b}{2}<\frac{1}{c}=\ln'(c)=\frac{\ln b-\ln a}{b-a}$ כדרוש.

מש"ל

שאלה 5

חשבו את הגבולות:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

פתרון
נוכיח באינדוקציה שהגבול הנ"ל הינו אפס. טריוויאלי עבור $k=0$. נניח שנכון עבור $k-1$ ונוכיח עבור k:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^k\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{kx^{k-1}}{e^x}=k\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k-1}}{e^x}=0.$$

ב. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}$

פתרון

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)}.$$ כעת

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\left(e^{3x}-5x\right)^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(e^{3x}-5x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=$$ כעת המונה

והמכנה שואפים לאינסוף ולכן ניתן להפעיל לופיטל, וזה שווה:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{3x}-5x\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9e^{3x}}{3e^{3x}-5}=3$$

ולכן הגבול כולו שווה ל- e^3.

ג. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}$

פתרון
המכנה והמונה שואפים לאפס, לכן נפעיל לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left(x^2\right)}{x^2\sin\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin(x^2)}{2x\sin(x^2)+x^2 2x\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{\sin(x^2)+x^2\cos(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2x\cos(x^2)+2x\cos(x^2)-x^2 2x\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)}{\cos(x^2)+\cos(x^2)-x^2\sin(x^2)}=\frac{1}{2}$$

ד. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$

<u>פתרון</u>

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{0} = 1$$