

שיטות נומריות

מרצה של הקורס : אגרנוביץ' אלכסנדרה

שעות קבלה : ימים א'-ד', 19:30-20:00
(בתיאום מראש דרך מייל)

מייל : alexandra.agranovich@gmail.com

מתרגלים : אושרוביץ' גרישה
בכר הילה

למה יש צורך בשיטות נומריות?

- פתרון אנליטי לא תמיד אפשר למצוא.

דוגמא : מציאת אינטגרל $\int_0^2 e^{-x^2} dx$

- מציאת פתרון אנליטי דורש זמן רב ולא נחוץ לפתרון הבעיה

- עיבוד אנליטי של תוצאות המדידה

- דוגמא : מציאת גובה הטיסה של הטיל כפונקציה של הזמן.

פתרון משוואות לא ליניאריות

$$f(x) = 0$$

הגדרה 1: נאמר, כי α - הוא שורש מסדר m (מריבוי) של המשוואה

$f(x) = 0$, אם $f(x) = (x - \alpha)^m h(x)$ עבור פונקציה $h(x)$ המקיימת

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = \text{const} \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

הגדרה 2: נניח כי $f(x)$ גזירה m פעמים ומתקיים כי

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

אם $m = 1$, נקרא שורש פשוט; אם $m > 1$, נקרא שורש מרובה.

הערה: קיום של שורש מרובה יכול לגרום לחוסר יעילות של שיטות למציאת שורש פשוט.

איטרציה

הגדרה : איטרציה היא שלב בתהליך החוזר על עצמו מספר פעמים :

כל חזרה גם נקראת איטרציה. תהליך המורכב מאיטרציות קרוי

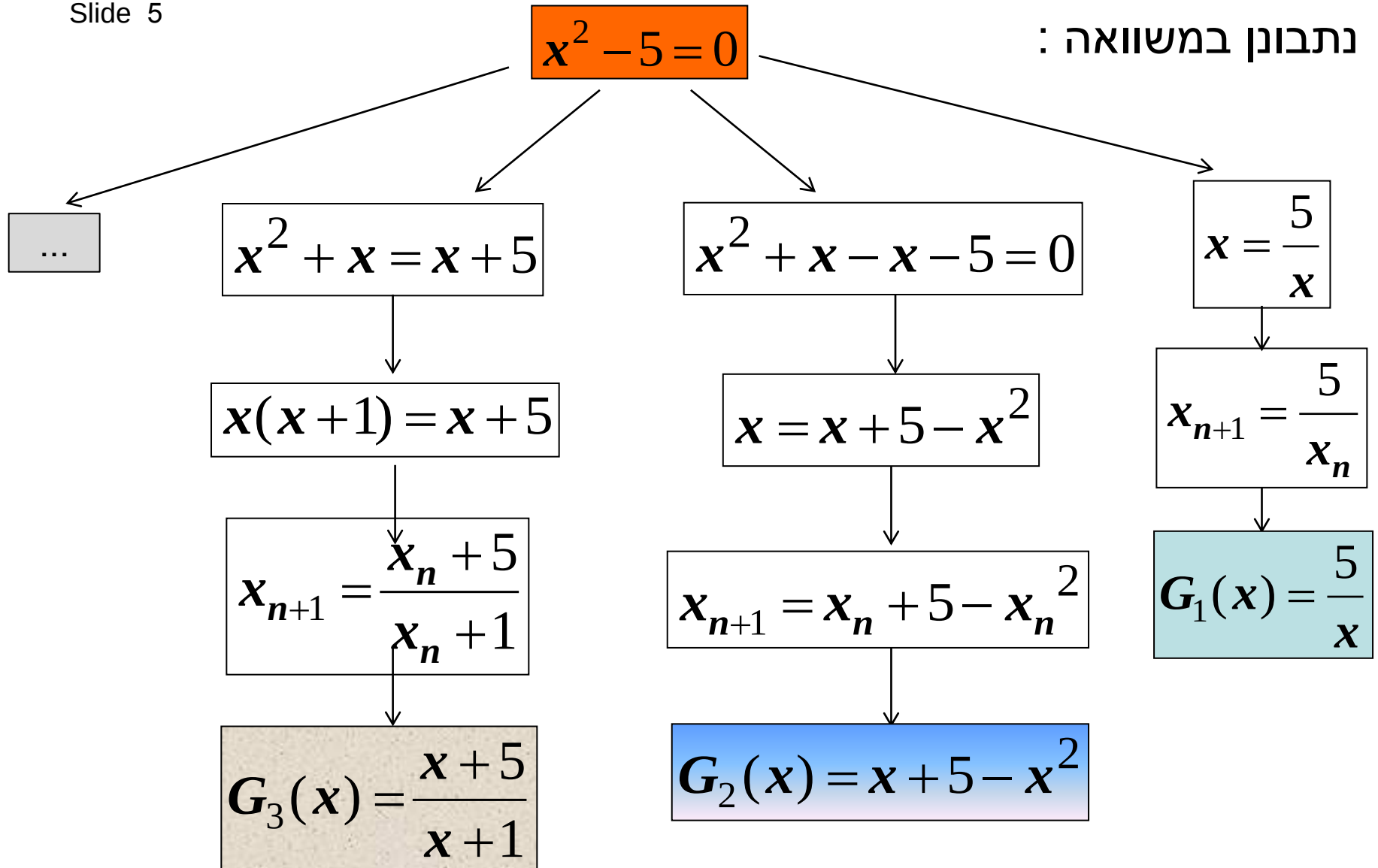
תהליך איטרטיבי.

כדי לבנות איטרציה דרושים : ערך (ניחוש) התחלתי x_0 וכלל $G(x)$

נקבל סדרת ערכים $\{x_n\}$ בעזרת שימוש בכלל $x_{n+1} = G(x_n)$

שאלה רלוונטית : האם $\{x_n\}$ תתכנס ? מהם תנאים להתכנסות?

נתבון במשוואה :



שאלה : איזה כלל נותן איטרציה מתכנסת?

$G_3(x) = \frac{x+5}{x+1}$		$G_2(x) = x + 5 - x^2$		$G_1(x) = \frac{5}{x}$		מספר איטרציה
2	1	2	1	2	1	0 (ניחוש התחלתי)
2.333333	3	3	5	2.5	5	1
2.2	2	-1	-15	2	1	2
2.25	2.333333	3	-235	2.5	5	3
2.230769	2.2	-1	-55455	2	1	4
2.238095	2.25	3	-3.075E+09	2.5	5	5
2.235294	2.230769	-1	-9.46E+18	2	1	6
2.236364	2.238095	3	-8.94E+37	2.5	5	7
2.235955	2.235294	-1	-8.00E+75	2	1	8

שורש אמיתי בקירוב של 6 ספרות אחרי נקודה הוא **2.236068**

הגדרה : אם α הוא שורש של משוואה $x = G(x)$ אזי α נקראת **נקודת שבת** של פונקציה $G(x)$.

בצורה גיאומטרית, נקודות שבת של הפונקציה $G(x)$ הן נקודות חיתוך של $G(x)$ עם קו ישר $y = x$.

הגדרה : איטרציה $x_{n+1} = G(x_n)$ עבור $n = 0, 1, \dots$ נקראת **איטרצית נקודת שבת**.

משפט 1 : תהי $G(x)$ - פונקציה רציפה וסדרה $\{x_n\}$ היא סדרת איטרציות עבור משוואה $x = G(x)$. אם $\{x_n\}$ מתכנסת ל- α , אזי α היא נקודת שבת של $G(x)$.

משפט 2 : תהי $G(x)$ - פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$.

א. אם $a \leq G(x) \leq b$ לכל $x \in [a, b]$ אזי ל- $G(x)$ יש נקודת שבת ב- $[a, b]$.

ב. נניח גם כי $G'(x)$ - מוגדרת בקטע (a, b) ושקיים קבוע $K < 1$ כך ש לכל $x \in (a, b)$ מתקיים כי $|G'(x)| \leq K < 1$. אזי ל- $G(x)$ יש נקודת שבת α יחידה בקטע $[a, b]$.

משפט 3 : נניח כי $(1) G(x), G'(x)$ - פונקציות רציפות ב- $[a, b]$;

$$(2) -K \text{ קבוע חיובי ;}$$

$$(3) x_0 \in (a, b) ;$$

$$(4) a \leq G(x) \leq b \text{ עבור כל } x \in [a, b].$$

א. אם $|G'(x)| \leq K < 1$ לכל $x \in [a, b]$, אזי האיטרציה $x_{n+1} = G(x_n)$

תתכנס לנקודת שבת יחידה $\alpha \in [a, b]$.

ב. אם $|G'(x)| > 1$ לכל $x \in [a, b]$, אזי האיטרציה $x_{n+1} = G(x_n)$

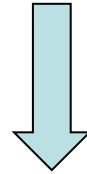
לא תתכנס ל- α .

הערה : משפט 3 ידוע גם כי *Fixed-Point Theorem*

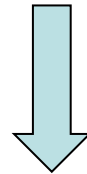
מסקנה : 1 הערכה לשגיאה אפשר לחשב לפי $|\alpha - x_n| \leq K^n |\alpha - x_0|$

2 לפי א"ש משולש :

$$|\alpha - x_0| \leq |\alpha - x_1| + |x_1 - x_0| \leq K |\alpha - x_0| + |x_1 - x_0|$$



$$|\alpha - x_0| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{1 - K}$$

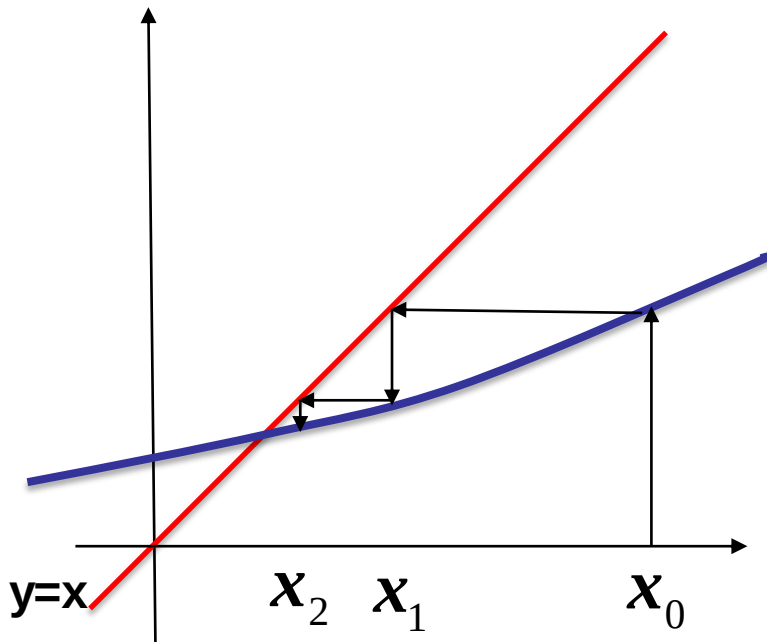


$$|\alpha - x_n| \leq \frac{K^n}{1 - K} |x_1 - x_0|$$

פרוש גרפי של איטרצית נקודת שבת

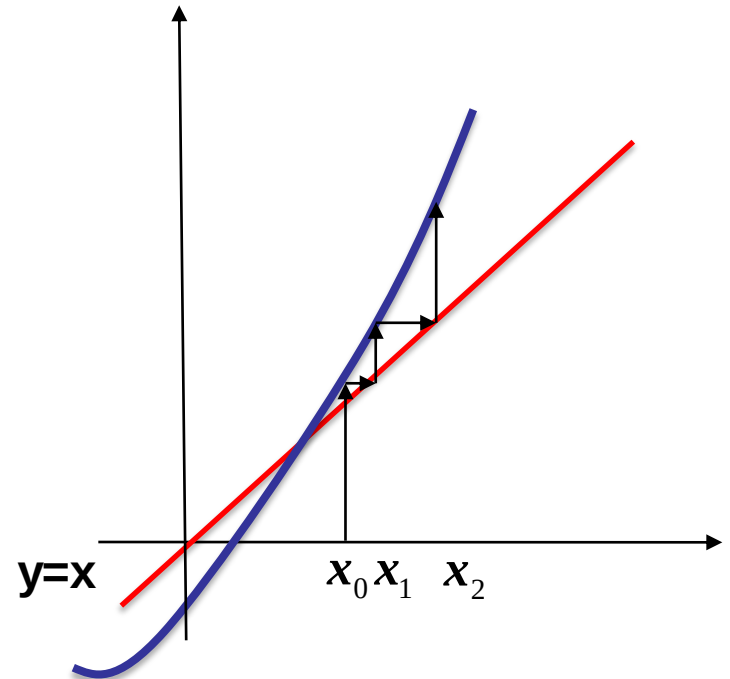
$$0 < G'(\alpha) < 1$$

התכנסות מונוטונית



$$G'(\alpha) > 1$$

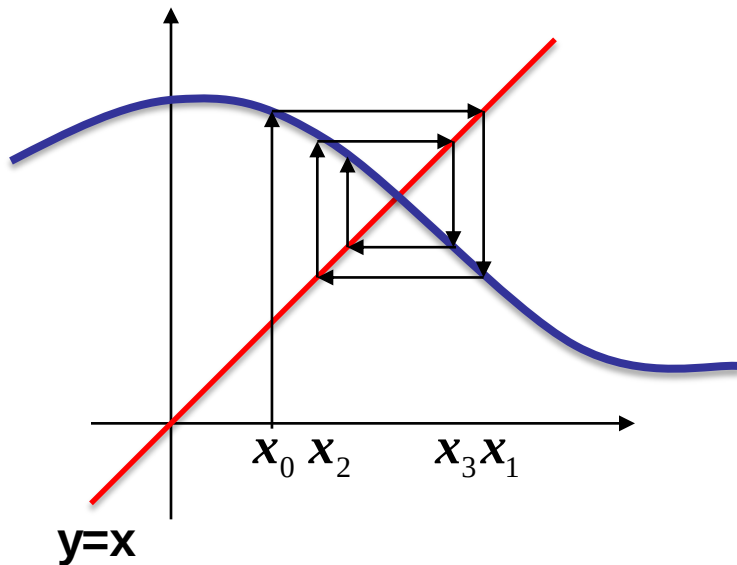
התבדרות מונוטונית



פרוש גרפי של איטרצית נקודת שבת

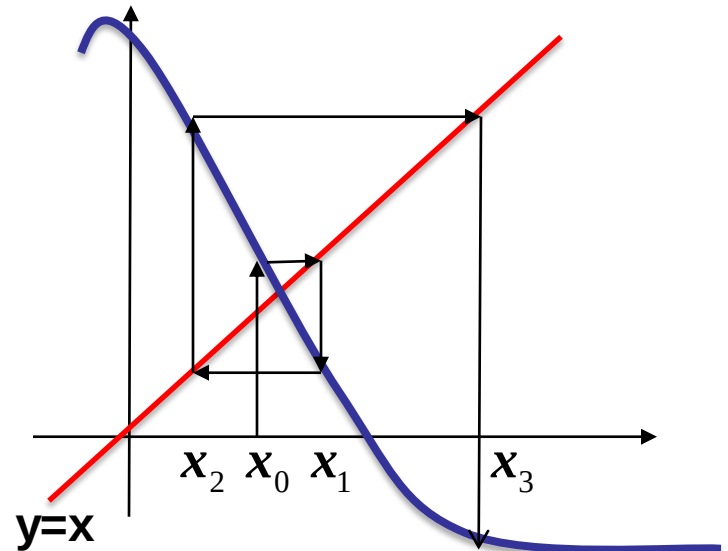
$$-1 < G'(\alpha) \leq 0$$

Oscillating convergence



$$G'(\alpha) < -1$$

Oscillating divergence



שיטות צמצום הקטעים המכילים את השורש

שיטת החצייה של Bolzano . (Bisection Method)



1781 -1848

Prague, Bohemia, Austrian Habsburg domain (now Czech Republic)

שיטת החצייה

דרישות: $f(x)$ - פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ ומתקיים

$$(1) \quad f(a) f(b) < 0$$

לפי משפט בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, קיים מספר c אחד לפחות

המקיים $a < c < b$ כך ש $f(c) = 0$.

רעיון: (1) נחצה קטע נתון לשני תתי קטעים שווים

(2) נבחר תת-קטע המקיים תנאי (1). זהו תת-קטע המכיל שורש

(3) נחזור לשלב (1)

תנאי עצירה : (1) אורך תת-קטע או מרחק בין שני ניוחשים אחרונים

(2) מספר איטרציות

אלגוריתם.

צעד 1 . להגדיר (א) a, b המקיימים תנאי (1)

(ב) מספר איטרציות מקסימאלי M

(ג) שגיאה רצויה $\delta > 0$

צעד 2. לחשב $c = \frac{a+b}{2}$

צעד 3. אם $|b-a| < \delta$ או מספר איטרציות גדול מ- M אזי c הוא קירוב השורש.
עצור.

צעד 4. אם $f(a)f(c) \leq 0$ אזי $b=c$ אחרת $a=c$. לחזור לצעד 2 .

הערכת שגיאה

משפט : תהי $f(x)$ - פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ וקיים $\alpha \in [a, b]$

כך ש $f(\alpha) = 0$. אם $f(a)f(b) < 0$ ו- $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא סדרת נקודות

אמצע המתקבלת כתוצאה מחציית קטעים, אזי מתקיים כי

$$|\alpha - c_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b-a), \quad n = 0, 1, \dots$$

וגם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

מסקנה : מספר איטרציות דרוש לקבלת שורש עם שגיאה נתונה δ הוא

(2)

$$n > \log_2 \left(\frac{b-a}{\delta} \right) - 1$$

היתרונות.

- השיטה תמיד מתכנסת בקצב קבוע
- אפשר לחשב מראש מספר איטרציות הדרוש כדי לקבל דיוק דרוש

חסרונות.

- התכנסות של השיטה איטית
- צריך למצוא מראש קטע שבו פונקציה מחליפה סימן.
- אי-אפשר להשתמש למציאת שורש בפונקציות שלא מחליפות סימן
- שימושי רק לפונקציות רציפות

שימוש אופייני.

שלב ראשון של הפתרון

דוגמא : השתמש בשיטת החצייה וחשב $\sqrt{5}$ עם דיוק 0.01 .

פתרון : נגדיר פונקציה $f(x) = x^2 - 5$. רוצים למצוא פתרון של משוואה $x^2 - 5 = 0$

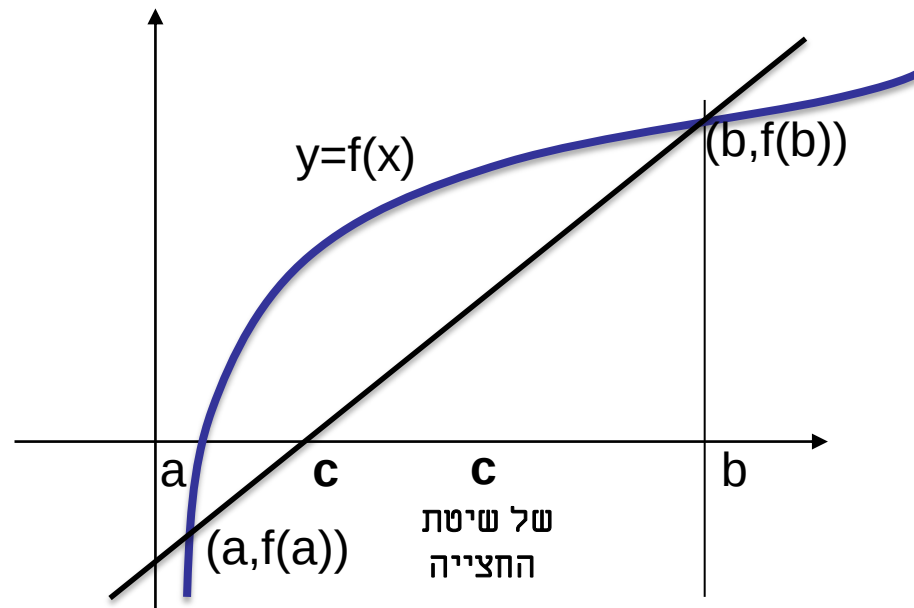
iteration i	a_i	b_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$	$f(c_i)$	$ b_i - a_i $
0	2	2.5	-1	1.25	2.25	0.0625	0.5
1	2	2.25	-1	0.0625	2.125	-0.484375	0.25
2	2.125	2.25	-0.48438	0.0625	2.1875	-0.21484	0.125
3	2.1875	2.25	-0.21484	0.0625	2.21875	-0.0772	0.0625
4	2.21875	2.25	-0.0772	0.0625	2.234375	-0.007568	0.03125
5	2.234375	2.25	-0.00757	0.0625	2.2421875	0.0274	0.015625
6	2.234375	2.2421875	-0.00757	0.0274	2.23828125	0.0099	0.00781

אפשר לחשב מספר איטרציות שיידרש להגיע לדיוק הנתון לפי נוסחא (2) כבר אחרי קביעת

הקטע ההתחלתי : $n > \log_2 \left(\frac{2.5-2}{0.01} \right) - 1 \approx 4.64386$, כלומר $n > 5$.

שיטת המיקום השגוי (Regula Falsi)

- מקור הצורך : שיטת החצייה מתכנסת איטית
- שוני משיטת החצייה : אופן בחירת הנקודה בתוך הקטע



- רעיון : להתחשב בצורת הפונקציה

משוואת המיתר העובר דרך קצוות הקטע הוא

$$p(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

נחפש $c \in [a, b]$ עבורו $p(c) = 0$. נציב במשוואת מיתר :

$$p(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (c - a) + f(a) = 0$$

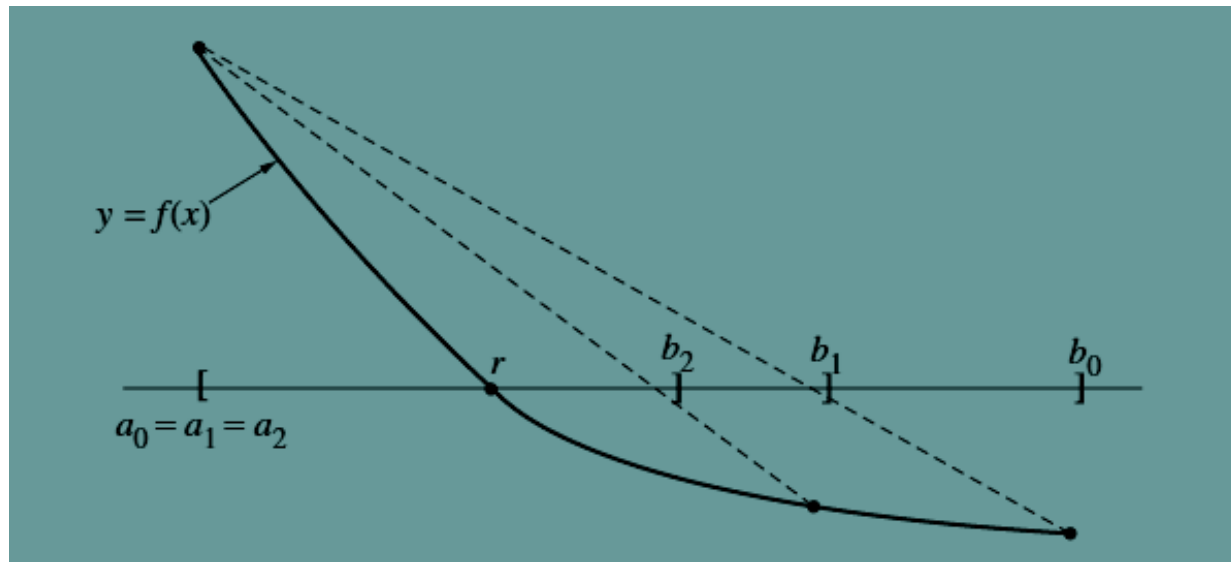
מכאן,

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \quad \text{או} \quad c = a - f(a) \frac{(b - a)}{f(b) - f(a)}$$

• **אלגוריתם של השיטה** זהה לחלוטין לאלגוריתם של שיטת

החצייה למעט תנאי עצירה נוסף.

- תנאי עצירה נוסף הוא $|f(c)| < \varepsilon$ עבור $\varepsilon > 0$ נתון
- סיבה לתנאי עצירה נוסף : אם פונקציה קעורה ליד השורש אזי $|b_n - a_n| \not\rightarrow 0$ ונקבל לולאה אינסופית.

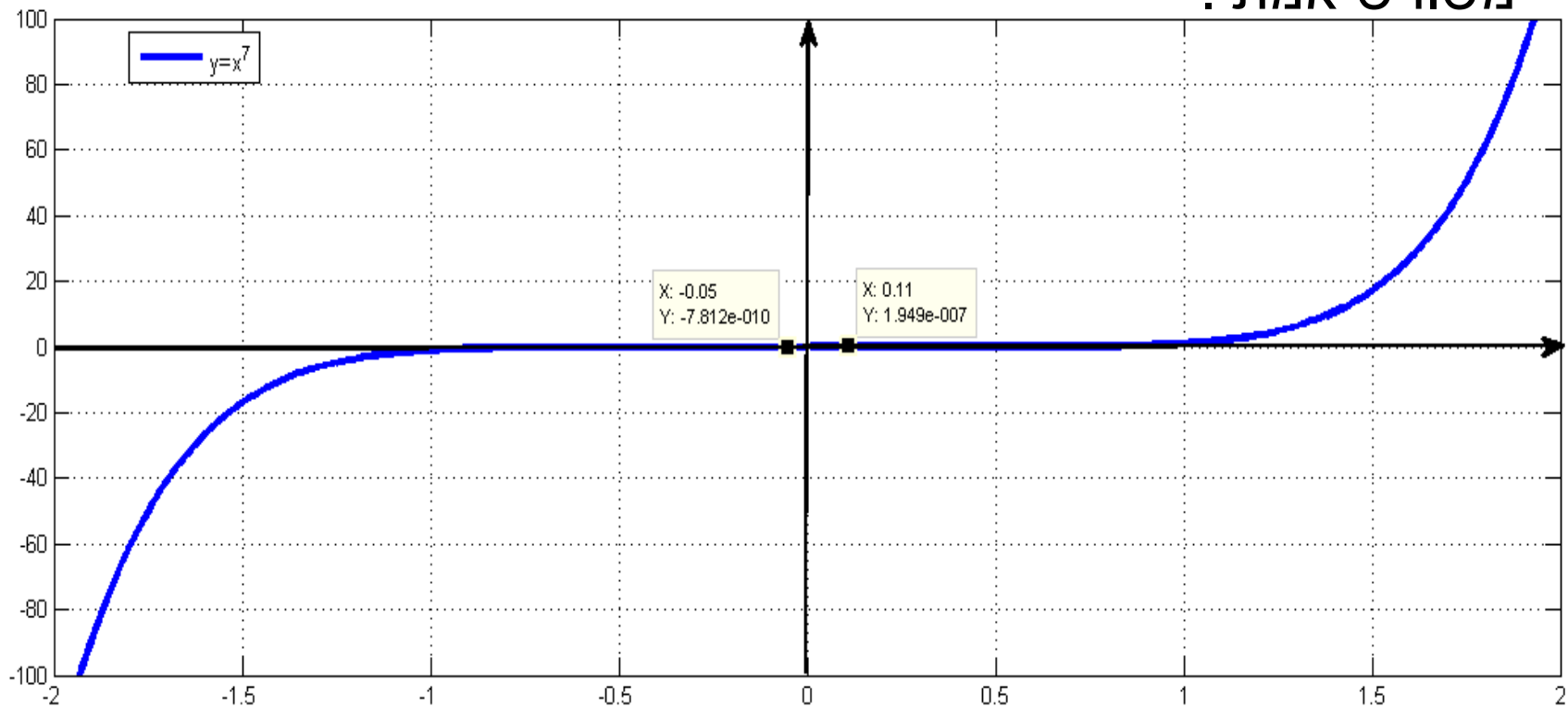


הערה : זה המקרה כאשר קצה אחד נשאר קבוע ושני "זז" לקראת הפתרון

• בעיה בתנאי עצירה $|f(c)| < \varepsilon$: עבור פונקציות שטוחות סביב

השורש. התנאי יכול להתקיים בזמן שניחוש עדיין רחוק מאוד

משורש אמתי.



טיפ חשוב : בחירת ε, δ קטנים מדיי יכולה להוביל לאיטרציה אינסופית.

איך לבחור נכון ? פי 100 גדולים יותר מ- 10^{-M} כאשר M – מספר ספרות עשרוניות

של המחשב עבור ייצוג עם נקודה צפה

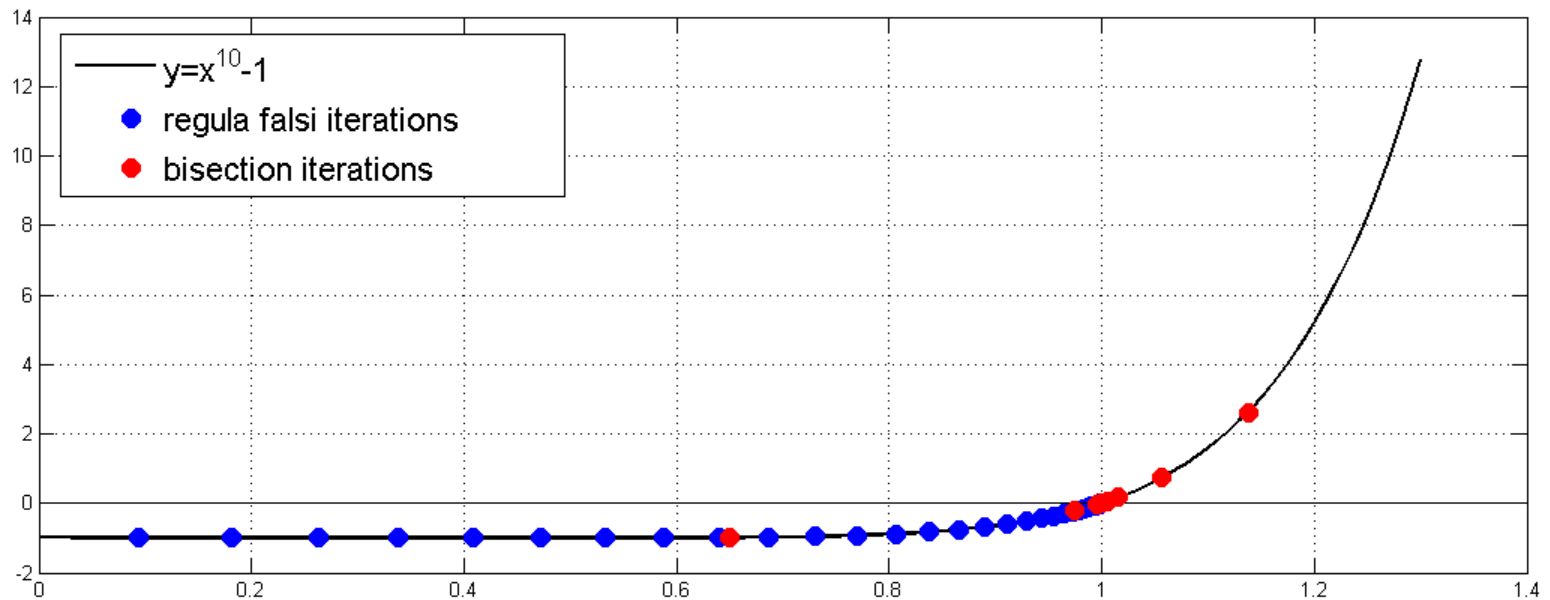
נחזור לדוגמא שראינו בשיטת החצייה : [\(go to slide 18\)](#)

iteration i	a_i	b_i	$f(a_i)$	$f(b_i)$	c_i	$f(c_i)$	$ b_i - a_i $
0	2.000000	2.500000	-1	1.25	2.222222	-0.061728	0.250000
1	2.222222	2.500000	-1	0.0625	2.235294	-0.003460	0.138889
2	2.235294	2.500000	-0.48438	0.0625	2.236025	-0.000193	0.132353
3	2.236025	2.500000	-0.21484	0.0625	2.236066	-0.000011	0.131988
4	2.236066	2.500000	- 0.0772	0.0625	2.236068	-0.000001	0.131967
5	2.236068	2.500000	-0.00757	0.0625	2.236068	0.000000	0.131966

אם נתייחס לדיוק ביחס לערך הפונקציה, אפשר לראות שדיוק של 0.01
 בשיטת החצייה מתקבל באיטרציה הרביעית בזמן שבשיטת המיקום
 השגוי כבר באיטרציה הראשונה

Regula Falsi or Bisection?

- מקרה בו שיטת החצייה עדיפה על שיטת המיקום השגוי :



- פתרון : modified regula falsi

סדר התכנסות וקצב התכנסות

הגדרה : נניח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ ונניח כי $\Delta_n = \alpha - x_n$ עבור $n \geq 0$. אם

קיימים שני קבועים חיוביים $r > 0, K \neq 0$ כך ש

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Delta_{n+1}|}{|\Delta_n|^r} = K$$

אזי r נקרא **סדר התכנסות** של הסדרה ו- K נקרא **קצב ההתכנסות**
(או קבוע השגיאה האסימפטוטי).

אם $r=1$ ו- $K < 1$ ההתכנסות נקראת ליניארית,

אם $r=2$ – התכנסות ריבועית.

משפט : תהי $x_{n+1} = G(x_n)$ איטרציה מתכנסת ו- $G(x)$ גזירה

ברציפות לפחות m פעמים בסביבת השורש α

$$\text{וידוע (1) } G^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1$$

$$G^{(m)}(\alpha) = \text{const} \neq 0 \quad (2)$$

אזי m הוא סדר התכנסות ו- $\frac{1}{m!} G^{(m)}(\alpha)$ הוא קצב התכנסות (קבוע

השגיאה האסימפטוטי)

הערה : אם כבר הנגזרת הראשונה לא מתאפסת אזי $m=1$

- שלוש השיטות שראינו עד כה הן שיטות עם התכנסות ליניארית

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|} = \frac{\frac{1}{2^{n+2}}(b-a)}{\frac{1}{2^{n+1}}(b-a)} = \frac{1}{2} \quad \text{עבור שיטת החצייה קיבלנו}$$

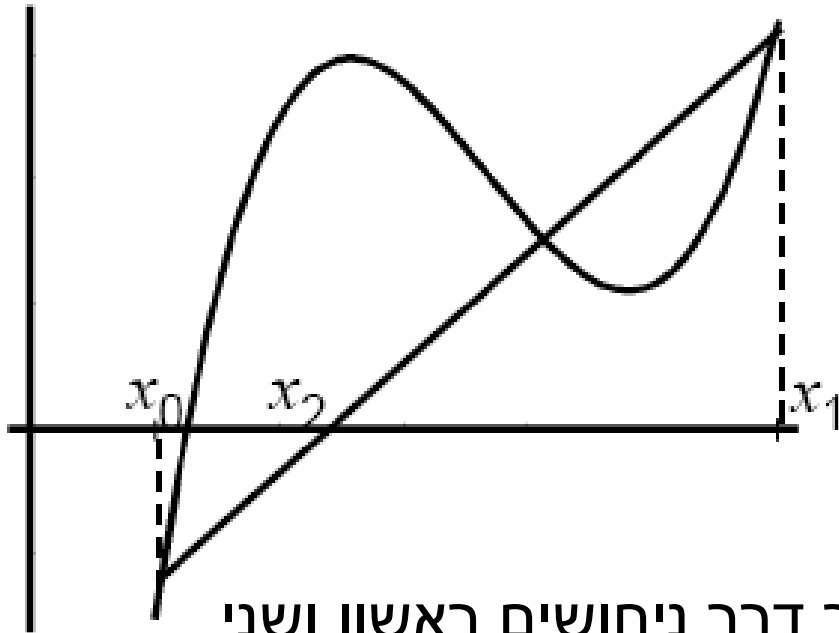
$$\text{עבור שיטת נקודת שבת קיבלנו} \quad |\alpha - x_{n+1}| \leq K |\alpha - x_n| \quad \text{עבור} \quad 0 < K < 1$$

- שיטת נקודת שבת היא חד נקודתיות : $x_{n+1} = G(x_n)$

- אחת מהדרכים "לשפר" סדר התכנסות היא שימוש בשיטות נקודת

$$\text{שבת רב נקודתית : } x_{i+1} = G(x_i, x_{i-1}, \dots)$$

שיטת המיתר (Secant method)



• דרישות : שני ניחושים x_0, x_1

• אלגוריתם דומה לאלגוריתם

של שיטת Regula Falsi :

ניחוש (קירוב) שלישי x_3

הוא נקודת אפס של קו ישר העובר דרך ניחושים ראשון ושני

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

או

$$x_2 = x_0 - f(x_0) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

• איטרציה כללית

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} = x_{i-1} - f(x_{i-1}) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

היתרונות

- במידה והשיטה מתכנסת, התכנסותה מהירה יותר משיטות ליניאריות.
- אפשר להראות כי סדר ההתכנסות של השיטה הוא $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1.618$
- דרושים שני ניחושים התחלתיים אך אין דרישה לסימן שונה עבור ערכים של פונקציה בהם
- בכל איטרציה (למעט הראשונה) דרוש חישוב פונקציה אחד ויחיד

חסרונות

- שיטה יכולה לא להתכנס
- חילוק באפס : במידה ושיפוע של ישר משיק בנקודת האפס של פונקציה קרוב ל-0

הערות

- זאת שיטת נקודת שבת דו-נקודתית $x_{i+1} = G(x_i, x_{i-1})$
- שיטת המיתר היא שיטת אינטרפולציה ליניארית.

אינטרפולציה היא שיטה המיועדת ליצירת נקודות חדשות של הנתונים בתחום קבוצת הנתונים הידועים המהווים קבוצת נקודות דיסקרטית.

אינטרפולציה ליניארית היא אינטרפולציה בעזרת 2 נקודות.

שיטת ניוטון-רפסון

Newton-Raphson method

הנחות.

• $f(x)$ גזירה בסביבת השורש α

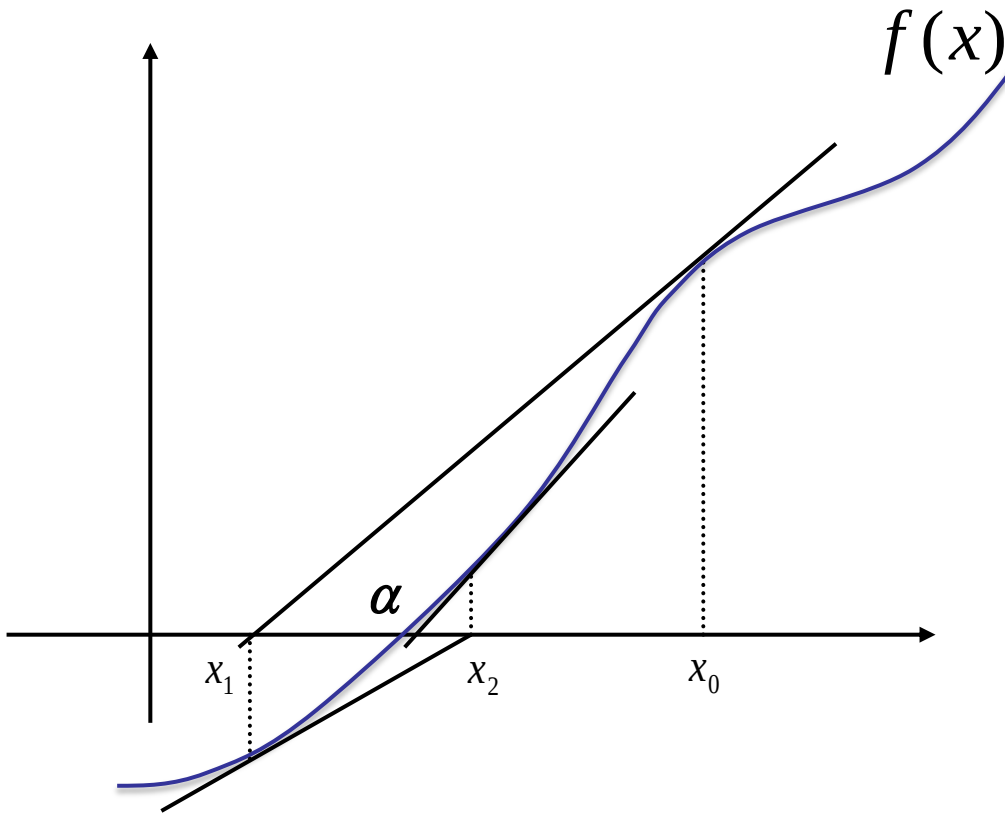
• $f'(\alpha) \neq 0$

פיתוח.

$$x_{i+1} = x_{i-1} - f(x_{i-1}) \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

$$x_i - x_{i-1} \rightarrow 0$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$



- כאן $G(x_i) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

- זאת אכן שיטת נקודת שבת : $G(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - 0 = \alpha$

- תנאי מספיק להתכנסות:

$$|G'(x)| = \left| 1 - \frac{[f'(x_i)]^2 - f(x_i)f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \right| = \left| \frac{f(x_i)f''(x_i)}{[f'(x_i)]^2} \right| < 1$$

הערכת שגיאה וסדר התכנסות

• הנחה: לפונקציה $f(x)$ יש לפחות 2 נגזרות רציפות בסביבת השורש

ומתקיים $f'(\alpha) \neq 0$

• עבור c_n בין x_n ל- x מתקיים :

$$\alpha - x_{n+1} = \left[\frac{-f''(c_n)}{2f'(x_n)} \right] (\alpha - x_n)^2$$

מכאן, סדר התכנסות של השיטה הוא 2

• איך להעריך את השגיאה באופן מעשי?

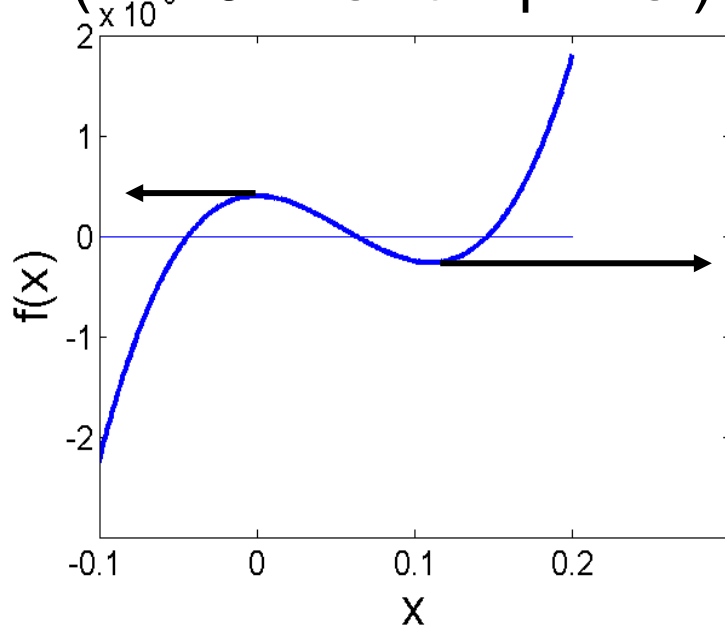
נשתמש במשפט לגרנז' ונקבל עבור ξ_n בין x_n לבין α

$$|\alpha - x_n| = \left| -\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)} \right| \approx \left| -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| = |x_{n+1} - x_n|$$

- במידה והשיטה מתכנסת, התכנסותה מהירה
- דרוש רק ניחוש התחלתי אחד

חסרונות

- חילוק ב-0 בגלל קירבת נקודות קיצון מקומי (יכול לקרות בכל איטרציה)



דוגמא : עבור המשוואה

$$f(x) = x^3 - 0.03x^2 + 2.4 \times 10^{-6} = 0$$

איטרציית ניוטון-רפסון היא

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 0.03x_i^2 + 2.4 \times 10^{-6}}{3x_i^2 - 0.06x_i}$$

עבור $x_0 = 0$ or $x_0 = 0.02$ במכנה נקבל 0

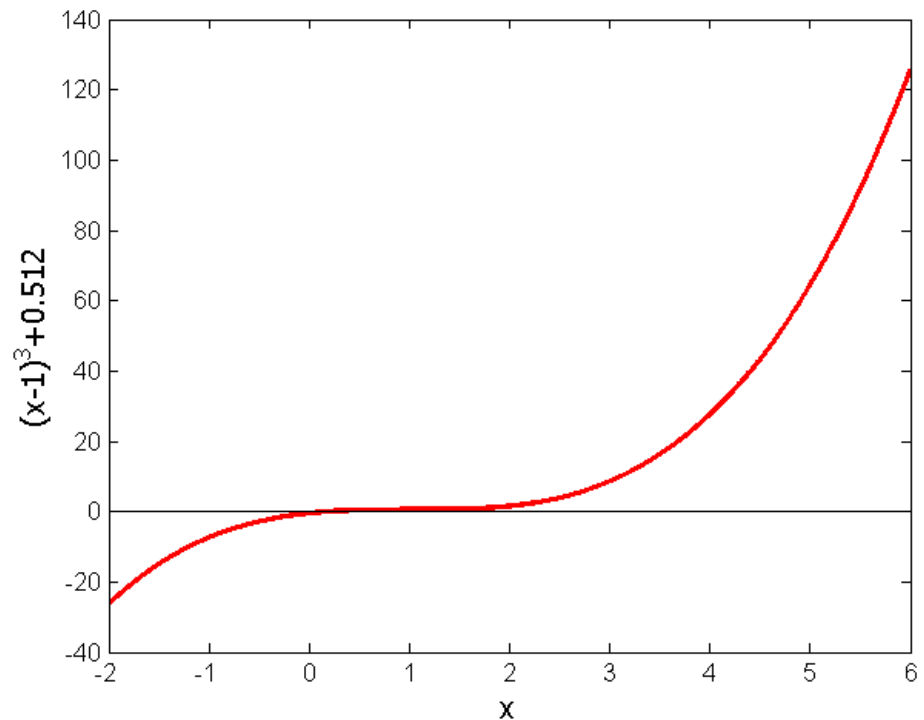
לערכים קרובים אפשר לקבל שגיאת עיגול גדולה

• התבדרות ליד נקודות פיתול

דוגמא : מצא שורש עבור $f(x) = (x-1)^3 + 0.512 = 0$

איטרציית ניוטון-רפסון היא
$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i^3 - 1)^3 + 0.512}{3(x_i - 1)^2}$$

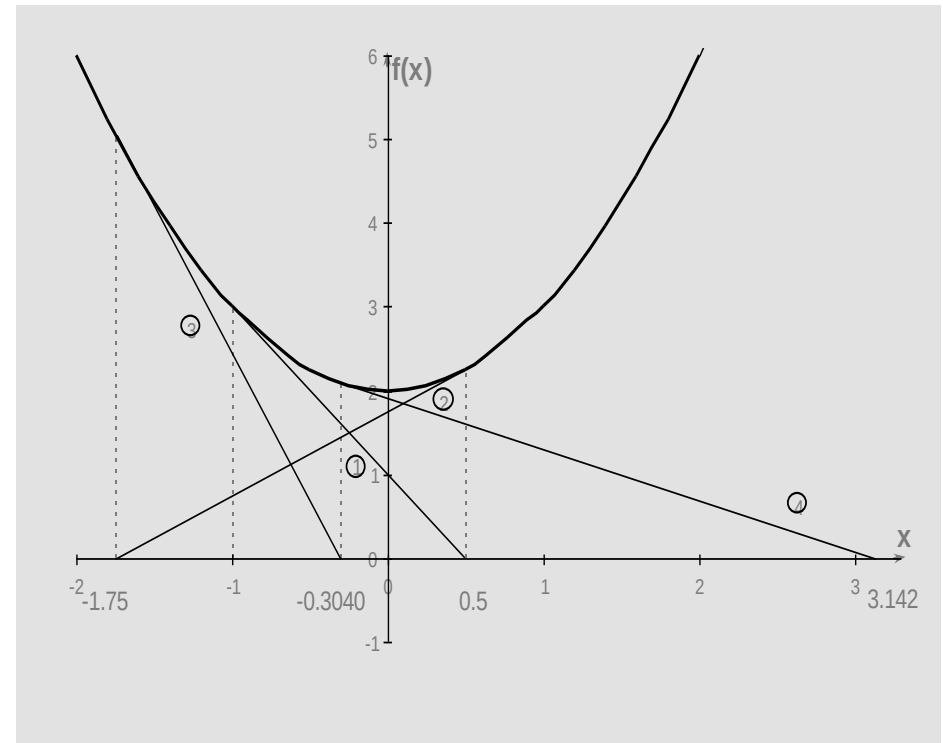
Iteration Number	x_i
0	5.0000
1	3.6560
2	2.7465
3	2.1084
4	1.6000
5	0.92589
6	-30.119
7	-19.746

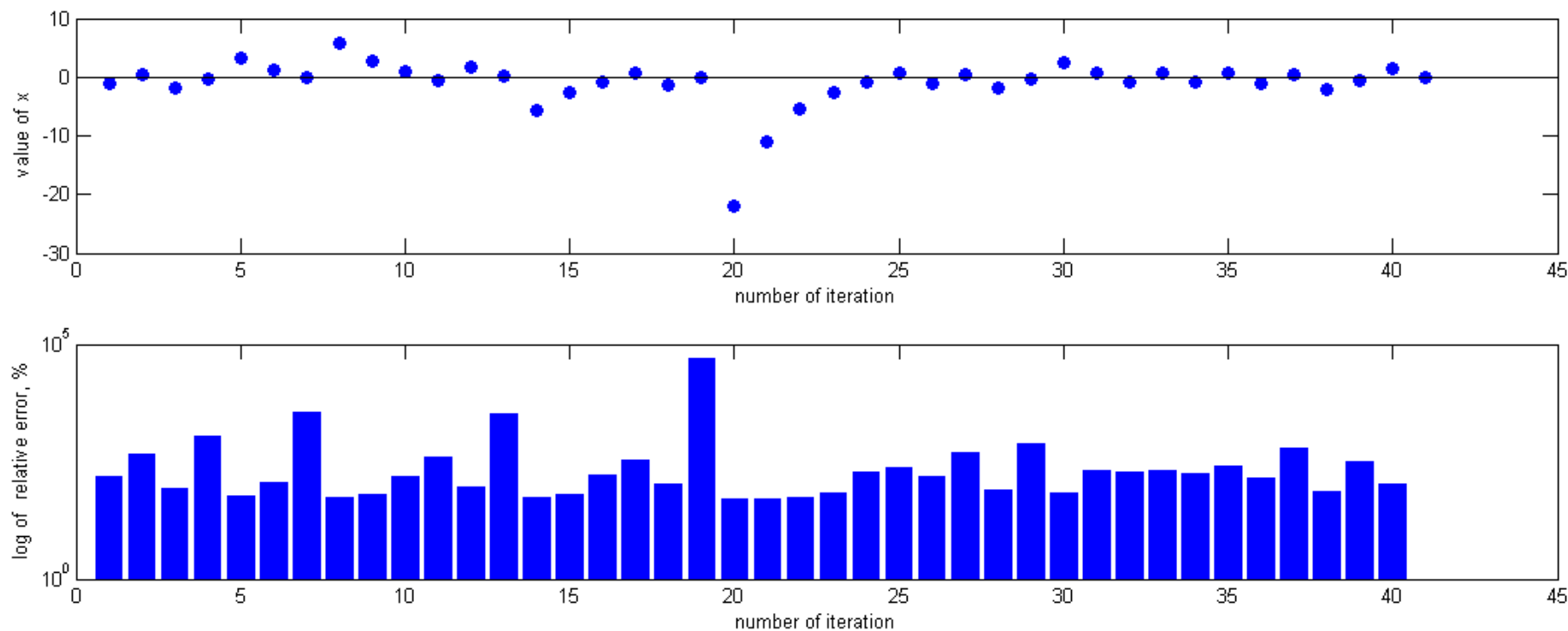


• תנודות (oscillations) ליד מינימום/מקסימום מקומיים

למשל, למשוואה $f(x) = x^2 + 2 = 0$ אין שורש ממשי

מספר איטרציה	x_i	$f(x_i)$	$\varepsilon_\alpha, \%$
0	-1.0000	3.00	
1	0.5	2.25	300.00
2	-1.75	5.063	128.571
3	-0.30357	2.092	476.47
4	3.1423	11.874	109.66
5	1.2529	3.570	150.80
6	-0.17166	2.029	829.88
7	5.7395	34.942	102.99
8	2.6955	9.266	112.93
9	0.97678	2.954	175.96



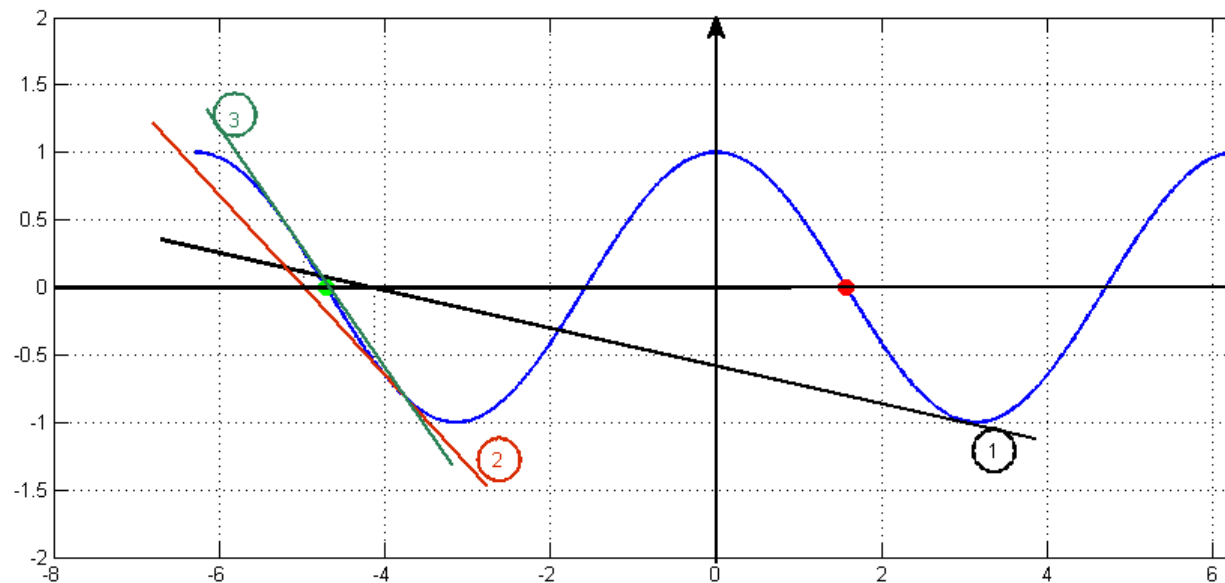


איטרצית ניוטון – רפסון עושה אוסצילציות סביב נקודת מינימום

• ניחוש ראשוני x_0 רחוק משורש שמחפשים ואיטרציה מתכנסת לשורש אחר.

דוגמא : $f(x) = \cos x$, $x_0 = 3$ ומחפשים שורש $x = \frac{\pi}{2}$
 קיבלנו במקום $-4.71238898 \approx -\frac{3\pi}{2}$

מספר איטרציה	x_i
0	3
1	-4.015252551
2	-4.852657566
3	-4.711461741
4	-4.712388981
5	-4.71238898
6	-4.71238898
7	-4.71238898
8	-4.71238898
9	-4.71238898



שורש מרובה

- כאשר יש שורש מרובה, השיטה יכולה להתכנס לעט יותר.

דוגמא: איטרצית ניוטון-רפסון עבור $f(x) = x^3 - 3x + 2$ עם $x_0 = 1.2$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 3x_i + 2}{3x_i^2 - 3} = \frac{2x_i^3 - 2}{3x_i^2 - 3} \quad \text{היא}$$

אחד מהשורשים הוא $\alpha = 1$

$$f'(1) = 0, \quad f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f''(1) \neq 0, \quad f''(x) = 6x$$

מכאן ש $\alpha = 1$ הוא שורש מרובה מריבוי 2

נתבונן בטבלה הבאה :

iteration	x_i	$x_{i+1} - x_i$	$e_i = \alpha - x_i $	e_{i+1} / e_i
1	1.20000	-0.09697	-0.20000	0.51515
2	1.10303	-0.05067	-0.10303	0.50817
3	1.05236	-0.02596	-0.05236	0.50425
4	1.02640	-0.01314	-0.02640	0.50217
5	1.01326	-0.00661	-0.01326	

אפשר לראות כי לשיטה במקרה הזה יש התכנסות ליניארית עם קצב 0.5

• האם אפשר לשפר שיטה במקרה כזה ?

שיטת ניוטון-רפסון משופרת למקרה של שורש מרובה

משפט : נניח כי איטרציית ניוטון-רפסון יוצרת סדרת קירובים

המתכנסת בצורה ליניארית לשורש $x = \alpha$ מריבוי $m > 1$.

אזי נוסחת ניוטון-רפסון הבאה

$$x_{i+1} = x_i - m \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

יוצרת סדרת קירובים המתכנסת בצורה ריבועית לשורש $x = \alpha$.

במידה ו- m לא ידוע אפשר להשתמש באיטרציה

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)}{u'(x_i)}$$

כאשר

$$u(x) = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

שיטת מולר (Muller's method)

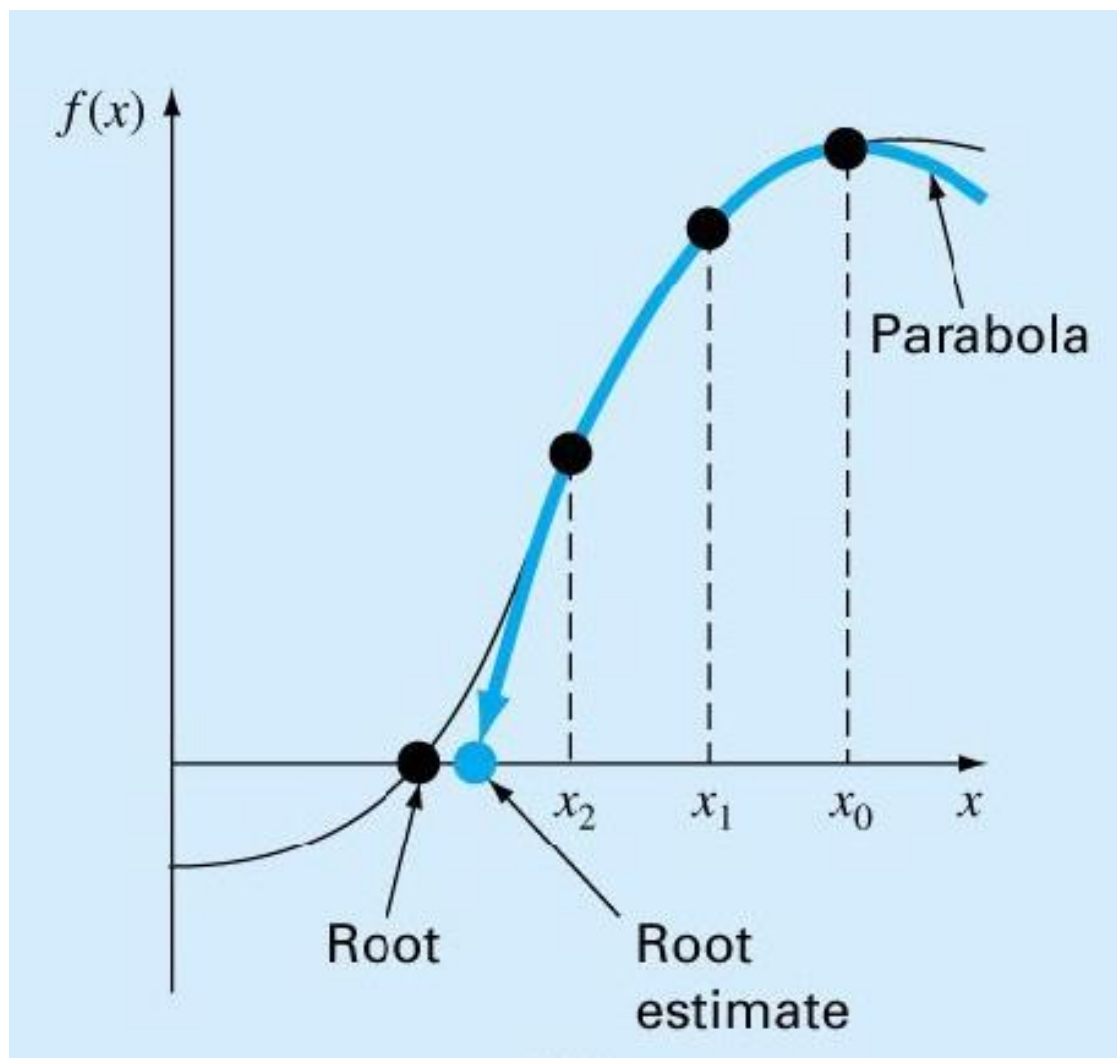


David Eugene Muller (November 2, 1924 – April 27, 2008)
American mathematician and computer scientist

- שיטת מולר היא הכללה של שיטת המיתר במובן שבו לא צריכים את נגזרת הפונקציה.
- במקום אינטרפולציה ליניארית בשיטת המיתר, שיטת מולר מציעה אינטרפולציה ריבועית : בכל איטרציה נעביר פרבולה דרך 3 נקודות. נקודת חיתוך שלה עם ציר ה-x היא הקירוב הבא.

<http://library.cshl.edu/oralhistory/speaker/david-e-muller/>

הסבר גרפי



- משוואת פרבולה $f(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$
- המטרה היא למצוא מקדמי פרבולה העוברת דרך 3 נקודות

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$

- נתחיל :

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$

$$f(x_2) = c$$

קיבלנו 3 משוואות עם 3 משתנים

$$h_0 = x_1 - x_0, h_1 = x_2 - x_1$$

- פתרון : נגדיר

$$d_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0}, d_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1}$$

נציב במשוואות :

$$h_0 d_0 + h_1 d_1 = (h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a$$

$$h_1 d_1 = h_1 b - h_1^2 a$$

$$a = \frac{d_1 - d_0}{h_1 + h_0}, \quad b = ah_1 + d_1, \quad c = f(x_2)$$

מכאן,

• נשאר להציב את המקדמים במשוואת פרבולה ולמצוא נקודות חיתוך

שלה עם ציר ה- x (נזכר שמשתנה המשוואה הוא $x - x_2$). נקבל

$$x_3 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$x_3 - x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_3 = x_2 - \frac{2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

- **באיזה שורש נבחר?** - הקטן בערך מוחלט, כדי להבטיח התכנסות.
- **בחירת קירובים לאיטרציה הבאה.** בוחרים 3 קירובים: אחד מהם x_3 שניים אחרים – הקרובים אליו.

הערות

1. למרות ששיטה משתמשת במספר חישובים נוספים לצורך חישוב מקדמי פרבולה, למעשה בכל איטרציה יש חישוב פונקציה אחד בלבד
2. במידה ויתקבל שורש מרוכב, חלקו המדומה יהיה קטן ואפשר להשתמש רק בחלק ממשי של המספר
3. סדר התכנסות של שיטת מולר הינו 1.84