שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: פרופ' מגרל
מתרגל: מני שלוסברג

תרגיל בית 11 – טופולוגיה

שאלה 1

נסמן ב-A' את אוסף נקודות ההצטברות של A; נסמן ב-A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.

יהי (X,d) מ"מ, תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל- $x\in X\setminus A$ כאשר $A=\{x_n\}$.

א. מצאו את A', A''.

ב. האם A קומפקטי?

ג. האם $A\cup\{x\}$ קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

שאלה 2

יהי (X,d) מ"מ קומפקטי. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ סדרה בעלת גבול חלקי יחיד לכל היותר. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

<u>הדרכה</u>: ראשית הראו שלסדרה אכן קיים גבול חלקי $a\in X$. כעת הניחו בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל- a ובנו תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש- $d(x_{n_k},a)\geq\varepsilon$. מכאן הגיעו לסתירה.

שאלה 3

א. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i\in I}K_i\neq\varnothing$.

שאלה 4

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. יהיו $A_1,\dots,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X. הוכיחו ש- $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ הוא קומפקטי.

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תתי מרחבים קומפקטיים.

ג. יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות קומפקטיות.
הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I} F_i$ קומפקטי.

שאלה 5

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף של תתי מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$. הוכיחו ש- $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \varnothing$.

תנו דוגמה נגדית למקרה שתתי המרחבים אינם קומפקטיים.

שאלה 6

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X,τ) אינו האוסדורף.

ב. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיימים ב- X מספר לא בן מניה של תתי מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תתי מרחבים לא קומפקטיים.

ג. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, כך שכל תת מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X,τ) קומפקטי.

שאלה 7

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו ש- f הומיאומורפיזם.

<u>הדרכה מומלצת:</u>

א. הראו שלכל $a<b$ קיימים $c<d$ כך ש- $f[a,b]=[c,d]$; בנוסף,

ב. ($f(a)=c$ וגם $f(b)=d$) או ($f(a)=d$ וגם $f(b)=c$)

[כלומר, f (במקרה הזה) מעבירה שפה לשפה.]

ג. הסיקו ש- f פתוחה ולכן גם הומיאומורפיזם.

בהצלחה!