ב"ש אנליזה 1 תשעז מועד ב

1. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=\frac{x\sin(x)}{e^x-1}$

פתרון: הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=0$ בלבד. נחשב אסימטוטה אנכית (אם קיימת) באיזור

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{e^x-1}\cdot\sin(x)=1\cdot 0=0$$

וכמו כן $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$ בחישוב דומה.

אסימטוטות אופקיות, אם קיימות:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin(x)}{e^x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x-1}\cdot\sin(x)=0$$

כחסומה כפול אפסה. למה אפסה? כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x-1}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

וגם

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sin(x)}{e^x-1}=\text{אין גבול}$$

כי אם היה גבול אז מכיוון ש $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-1}=\frac{1}{0-1}=-1$ אז גם ל $\lim_{x\to-\infty} x\sin(x)$ היה גבול. אבל $a_n=-2\pi n\to -\infty$ ו

$$a_n\sin(a_n)=0\to 0$$

ו $b_n=-2\pi n+\frac{\pi}{2}\to-\infty$ ו

$$b_n\sin(b_n)=b_n\to-\infty$$

ולכן הגבול לא קיים.

(ב) $g(x)=x\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)$

פתרון: הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת עבור $x=-1$ בלבד. נחשב אסימטוטה אנכית (אם קיימת) באיזור

$$\lim_{x\to-1^+} g(x)=\lim_{x\to-1^+} x\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)=\left\{-1\cdot\arctan\left(\frac{-1}{0^+}\right)=-\arctan(-\infty)\right\}=\frac{\pi}{2}$$

וכמו כן

$$\lim_{x\to-1^-} g(x)=\lim_{x\to-1^-} x\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right)=\left\{-1\cdot\arctan\left(\frac{-1}{0^-}\right)=-\arctan(\infty)\right\}=-\frac{\pi}{2}$$

אסימטוטות אופקיות, אם קיימות:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} x\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) = \{\infty\cdot\arctan(1)\} = \infty$$

ובאופן דומה גם

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x\arctan\left(\frac{x}{1+x}\right) = \{-\infty\cdot\arctan(1)\} = -\infty$$

(ג) $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

פתרון: הפונקציה $h(x)$ אינה מוגדרת עבור $x \le 0$ בלבד. נחשב אסימטוטה אנכית (אם קיימת) באיזור

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \{\frac{-\infty}{0^+}\} = -\infty$$

אסימטוטות אופקיות, אם קיימות:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

2. פתרו את האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_0^{e-1} \frac{\sin(\ln(x+1))}{x+1}\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש בהצבה:

$$\int_0^{e-1} \frac{\sin\left(\ln\left(x+1\right)\right)}{x+1}\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{c} t=\ln(1+x) \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \int_0^1 \sin\left(t\right)\mathrm{d}t = -\cos(x)|_0^1 = -\cos(1) - (-1) = 1-\cos(1)$$

(ב) $\int \ln\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int \ln\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{cc} f=\ln\left(x^2+x+1\right) & g'=1 \\ f'=\frac{2x+1}{x^2+x+1} & g=x \end{array}\right\} = x\ln\left(x^2+x+1\right) - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\cdot x\mathrm{d}x$$

ונמשיך לחשב רק

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\cdot x\mathrm{d}x$$

נעשה חילוק פולינומים

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ x^2+x+1) & 2x^2 \quad +x \\ & -2x^2-2x-2 \\ \hline & -x-2 \end{array}$$

וקיבלנו ש $2x^2+x = 2\left(x^2+x+1\right)+(-x-2)$ ולכן

$$\frac{2x^2+x}{x^2+x+1} = \frac{2\left(x^2+x+1\right)-(x+2)}{x^2-x-6} = 2-\frac{x+2}{x^2+x+1} = 2-\frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+x+1} = 2-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{3}{x^2+x+1}$$

הגורם x^2+x+1 ולכן נשתמש בהשלמה לריבוע למצוא את $\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3/4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3/4}}{3/4}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)+C$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$\begin{aligned}\int \ln\left(x^2+x+1\right)\mathrm{d}x&=x\ln\left(x^2+x+1\right)-\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\cdot x\mathrm{d}x\\&=x\ln\left(x^2+x+1\right)-\int\left(2-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{3}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x\\&=x\ln\left(x^2+x+1\right)-\left(2x-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3/4}}\right)\right)+C\end{aligned}$$

(ג) $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

פתרון: נשתמש בהצבה

$$\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ccc} t=\sqrt{x} & \Rightarrow & t=\sqrt{x}\\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x & & 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int e^t\cdot 2t\mathrm{d}t$$

ונשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int e^t\cdot 2t\mathrm{d}t=\left\{\begin{array}{cc} f=2t & g'=e^t\\ f'=2 & g=e^t\end{array}\right\}=2te^t-\int 2e^t\mathrm{d}t=2te^t-2e^t+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$$

3. נביט בפונקציה $f(x)=x+\sin^2(x)$.

(א) מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=0$ והוכיחו.

פתרון: השאלה היא כמה שורשים יש ל f כיוון ש $0\leq\sin^2(x)\leq 1$, כל השורשים, אם ישנם, נמצאים בקטע $[-1,0]$. נגזור

$$f'(x)=1+2\sin(x)\cos(x)=1+\sin(2x)$$

בקטע $[-1,0]$ מתקיים ש $\sin(2x)$ מקבלת פעם אחת את הערך -1 ובנקודה $-\frac{\pi}{4}$. לכן זה הנקודה היחידה בה f' מתאפסת. מהטבלה

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0
$f'(x)$	$+$	0	$+$

נסיק כי f עולה ממש בקטע $[-1,0]$. לכן הערך המקסימאלי שלה מתקבלת ב 0 (הקצה הימני) והוא שווה ל $f(0)=0$. לכן לכל $-1\leq x<0$ מתקיים

$$f(x)<f(0)=0$$

ולכן 0 זה הנקודה היחידה בה f מתאפסת. לכן יש פתרון יחיד למשוואה שבשאלה.

(ב) הוכיחו/הפריכו: לכל $a\in\mathbb{R}$קיים פתרון למשוואה $f(x)=a$.

פתרון: הוכחה: נגדיר $g(x)=f(x)-a$ ונרצה להראות ש g מתאפסת. מתקיים ש

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} x+\sin^2(x)-a=\{\infty+\text{חסום}-a\}=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} x+\sin^2(x)-a=\{-\infty+\text{חסום}-a\}=-\infty$$

ולכן קיימות $c<0<d$ כך ש $f(c)<0, f(d)>0$. מכיוון שבקטע $[c,d]$ הפוקציה g רציפה ומחליפה סימן נקבל לפי משפט ערך הביניים שקיימת נקודה בקטע בה g מתאפסת כפי שרצינו.

4. תהא f המקיימת $f(0)=0, f'(0)=1$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f''(x)\le 0$.

(א) הוכיחו שלכל $x>0$ מתקיים $f(x)\le x$.
פתרון: הפונקציה גזירה ורציפה בכל הממשיים כי גזירה פעמיים. לכן: לכל $x>0$, בקטע $[0,x]$ הפונקציה רציפה וגזירה ומתקיים לפי משפט לגרנז שקיימת $0<c<x$ כך ש

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c)$$

מכיוון ש $f''\le 0$ נסיק ש f' יורדת ולכן $f'(c)\le f'(0)=1$ ולכן $\frac{f(x)}{x}\le 1$ ומכיוון ש x חיובי, הכפלה ב x שומרת על אי השיוויון ונקבל $f(x)\le x$ כפי שרצינו.

(ב) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x^2$.
פתרון: בצירוף סעיף קודם נקבל שלכל $x>0$ מתקיים

$$f(x)-x^2=x\left(\frac{f(x)}{x}-x\right)\le x\,(1-x)$$

ומכיוון ש $\lim_{x\to\infty} x\,(1-x)=\{\infty\cdot(1-\infty)\}=-\infty$ נקבל שלכל M החל משלב מסוים $x\,(1-x)<-M$ ולכן גם

$$f(x)-x^2\le x\,(1-x)<-M$$

ולכן, לפי הגדרה, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x^2=-\infty$.

5. נביט בפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$$

(א) לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ גזירה ב $x=0$? הוכיחו שהיא אכן גזירה אז.
פתרון: על מנת ש f תהיה גזירה ב $x=0$ היא צריכה להיות רציפה שמה. נבדוק לאילו ערכי a הפונקציה $f(x)$ רציפה ב $x=0$. על מנת שהפונקציה תהיה רציפה ב $x=0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=a$$

מתקיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

ולכן רק עבור $a=1$ היא תהיה רציפה. כעת נבדוק האם f גזירה ב $x=0$ עבור $a=1$: לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

נחשב:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$$

ולכן רק עבור $a=1$ היא תהיה גם רציפה וגם גזירה ב $x=0$ ומתקיים $f(0)=1, f'(0)=\frac{1}{2}$.

(ב) מצאו את הערך המינימאלי של $g(x)=e^x(x-1)$ בכל $\mathbb{R}$.

פתרון: נגזור

$$g'(x)=e^x(x-1)+e^x=xe^x$$

והיא מתאפסת רק ב $x=0$. מהטבלה

x	-1	0	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$

נסיק כי f יורדת ממש בקרן $(-\infty,0)$ ועולה ממש ב $(0,\infty)$ ולכן 0 נקודת מינימום מוחלט והערך בה $f(0)=e^0(0-1)=$ -1.

(ג) הוכיחו כי f מונוטונית.

פתרון: ראינו שהפונקציה שלנו גזירה $x=0$ ולכן

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)+1}{x^2} & x\neq0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}$$

ומכיוון שראינו שהערך המינמאלי של $e^x\cdot(x-1)$ הוא -1 נסיק ש $e^x\cdot(x-1)+1\geq0$ ולכן $\frac{e^x\cdot(x-1)+1}{x^2}\geq0$ בנוסף, גם $\frac{1}{2}$חיובי ובסה"כ קיבלנו ש $f'(x)\geq0$ לכל x ממשי. לכן f מונוטונית עולה בכל הממשיים.