

## בוחר טופולוגיה תשפב

1.5.2022 שעת התחלה: 9:00

מרצה: פרופסור מיכאל מגרל. מתרגלים: תמר בר-און, רועי שלו.  
הנחיות:

- ענו על כל השאלות. זמן מוקצב: שעה ורבע.
- כל ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

### בהצלחה!

1. (כל סעיף 15 נקודות) על קבוצת הממשיים  $\mathbb{R}$ , נגדיר את הפונקציה

$$d(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

(כאשר  $|x|$  הוא הערך המוחלט של  $x$ ).

(א) הוכיחו כי  $d$  היא מטריקה על  $\mathbb{R}$ .

(ב) תהא  $x$  ממשית. הוכיחו: נקודה מבודדת ב  $(\mathbb{R}, d)$  אם ורק אם  $x \neq 0$ .

(ג) תהא קבוצה פתוחה  $O$  ב  $(\mathbb{R}, d)$  המקיימת כי  $0 \in O$ . הוכיחו כי קיים  $0 < r$  כך ש  $(-r, r) \subseteq O$ .

(ד) האם הפונקציה  $f(x) = x^2$  מ  $(\mathbb{R}, d)$  ל  $(\mathbb{R}, d)$  רציפה? הוכיחו תשובתכם.

(ה) האם הפונקציה  $g(x) = x + 1$  מ  $(\mathbb{R}, d)$  ל  $(\mathbb{R}, d)$  רציפה? הוכיחו תשובתכם.

2. (כל סעיף 20 נקודות) יהא  $(X, d)$  מרחב מטרי ותהינה  $A, B$  תתי קבוצות של  $X$ . הוכיחו/הפריכו:

(א) מתקיים כי  $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$  (כאשר  $\text{cl}(S)$  מסמן את הסגור של קבוצה  $S$ ).

(ב) מתקיים כי  $\text{cl}(A \cap B) = \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B)$  (כאשר  $\text{cl}(S)$  מסמן את הסגור של קבוצה  $S$ ).