ב"ש בדידה תשפ מועד א

1. פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תקרא <u>שאפתנית</u> אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1<x_2)\wedge(f(x_1)\leq f(x_2))$$

(א) האם $f(x)=e^x$ שאפתנית?
פתרון: כן. יהא x_1 ממשי צריך למצוא x_2 ממשי כך ש $x_1<x_2$ וגם $e^{x_1}\leq e^{x_2}$. נבחר $x_2=x_1+1$ אזי $x_1<x_2$ ומתקיים $e^{x_1}\leq e^{x_2}$ כי e^x פונקציה עולה.

(ב) האם $f(x)=-x^2$ שאפתנית?
פתרון: לא. בשביל שפונקציה תהיה לא מתאימה, נשלול את הפסוק

$$\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\geq x_2)\vee(f(x_1)>f(x_2))$$

אכן זה פסוק אמת במקרה של $f(x)=-x^2$. הוכחה: נבחר $x_1=0$ וצריך להראות שלכל x_2 ממשי או ש $0\geq x_2$ או ש $-x^2=f(x_2)<f(0)=0$. אכן, יהא x_2 ממשי. אם הוא $0\geq x_2$ סיימנו. אחרת, הוא חיובי, $x_2>0$, ואז x_2^2 חיובי ואז $-x_2^2$ שלילי, וסיימנו.

(ג) האם ייתכן ש $f(x)$ שאפתנית וגם $-f(x)$ שאפתנית?
פתרון: כן. למשל, $f(x)=\sin(x)$ שאפתנית וגם $-f(x)=-\sin(x)$ שאפתנית. הוכחה:

- הוכחה ש $\sin(x)$ שאפתנית: יהא x_1 ממשי. צריך למצוא x_2 ממשי כך ש $x_1<x_2$ וגם $\sin(x_1)\leq\sin(x_2)$. נבחר $x_2=x_1+2\pi$ והוא יקיים את הדרוש בגלל ש $\sin$ מחזורית 2π ולכן $\sin(x_1)=\sin(x_2)$.
- הוכחה ש $-\sin(x)$ שאפתנית: יהא x_1 ממשי. צריך למצוא x_2 ממשי כך ש $x_1<x_2$ וגם $-\sin(x_1)\leq-\sin(x_2)$. נבחר $x_2=x_1+2\pi$ והוא יקיים את הדרוש בגלל ש $-\sin$ מחזורית 2π ולכן $-\sin(x_1)=-\sin(x_2)$.

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $(A\backslash B)\cup(C\backslash A)=(A\cup C)\backslash B$.
פתרון: הפרכה: $A=\{1\},C=\{2\}$ ו $B=\{1,2\}$. אזי

$$(A\cup C)\backslash B=\{1,2\}\backslash\{1,2\}=\emptyset$$

לעומת זה

$$(A\backslash B)\cup(C\backslash A)=\emptyset\cup\{2\}=\{2\}$$

ואין שיוויון.

(ב) לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $A\cap B\subseteq A\backslash(B\backslash A)$.
פתרון: הוכחה: יהא $x\in A\cap B$. צריך להוכיח $x\in A\backslash(B\backslash A)$. מכיון ש $x\in A\cap B$ אז $x\in A$ וגם $x\in B$ ולכן $x\notin B\backslash A$ ולכן $x\in A\backslash(B\backslash A)$ (מכיוון ש $x\in A$).

(ג) לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\backslash B\subseteq C$ אז $P(A)\backslash P(B)\subseteq P(C)$.
פתרון: הפרכה: $A=\{1,2\},B=\{2\},C=\{1\}$ מקיימות כי

$$A\backslash B=\{1\}=C$$

ולכן יש הכלה $A\backslash B\subseteq C$. מצד שני

$$P(A)\backslash P(B)=\{A,\{2\}\}\nsubseteq\{\emptyset,\{1\}\}=P(C)$$

3. הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי לכל n מתקיים 25^n-1 מתחלק ב 6 ללא שארית.
פתרון: הוכחה:

- בסיס $n=1$: אכן, $25^1-1=24$ מתחלק ב 6 ללא שארית.
- צעד: נניח נכונות עבור n, כלומר, 25^n-1 מתחלק ב 6 ללא שארית. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר, $25^{n+1}-1$ מתחלק ב 6 ללא שארית. מתקיים

$$25^{n+1}-1=25\cdot25^n-1=25\cdot25^n-25+24=25\left(25^n-1\right)+24$$

ומכיוון ש $\left(25^n-1\right)$מתחלק ב 6 ללא שארית (הנחת האינדוקציה) גם $25\left(25^n-1\right)$ מתחלק ב 6 ללא שארית. ומכיוון ש 24 מתחלק ב 6 ללא שארית אז גם הסכום $25\left(25^n-1\right)+24$ מתחלק ב 6 ללא שארית.

4. תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $f\circ g$ הפיכה וגם $g\circ f$ הפיכה אז g הפיכה.
פתרון: הוכחה:
כיוון ש $f\circ g$ הפיכה אז בפרט היא חח"ע ולכן g חח"ע. מכיוון ש $g\circ f$ הפיכה היא בפרט על ולכן g על. קיבלנו ש g חח"ע + על ולכן הפיכה.

(ב) אם f אינה חח"ע ו g על אזי $f\circ g$ אינה חח"ע.
פתרון: הוכחה:
נניח בשלילה ש $f\circ g$ חח"ע. אזי g חח"ע ובצירוף ההנחה ש g על נקבל ש g הפיכה וקיימת הופכית g^{-1}. בפרט $(f\circ g)\circ g^{-1}$ גם חח"ע כהרכבה של חח"ע. אבל $(f\circ g)\circ g^{-1}=f\circ g\circ g^{-1}=f$ וההנחה היא ש f אינה חח"ע. סתירה.

(ג) $f\circ g$ הפיכה אם ורק אם $g\circ f$ הפיכה.
פתרון: הפרכה: נגדיר $f(n)=n+1$ ו

$$g(n)=\begin{cases}n-1 & n\geq2\\ 1 & n=1\end{cases}$$

אזי g אינה חח"ע ($g(1)=g(2)$) ולכן $f\circ g$ אינה הפיכה (אחרת, היא הפיכה ובפרט חח"ע ואז גם g חח"ע). מצד שני

$$g\circ f=Id$$

ולכן הפיכה.

5. בכיתה יש 4 בנים ו 5 בנות. בכמה דרכים ניתן לבחור נציגים לועד כך ש:

(א) בועד יהיה בן אחד ותהיינה שתי בנות.
פתרון: צריך לבחור בן אחד מתוך 4 בנים. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{4}{1}$. צריך לבחור שתי בנות מתוך 5 בנות. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{5}{2}$. לכן התשובה היא $\binom{5}{2}\binom{4}{1}$.

(ב) בועד יהיו 3 נציגים כלשהם.

פתרון: צריך לבחור 3 נציגים מתוך $9 = 5 + 4$ אפשרויות. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{9}{3}$.

(ג) בועד תהיה מנהלת בת, ועוד שני נציגים כלשהם.

פתרון: צריך לבחור בת אחת להיות מנהלת מתוך 5 בנות. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{5}{1}$. נשארנו עם $8 = 4+4$ אנשים (בת אחת נבחרה למנהלת..) שמתוכם צריך לבחור 2 נציגים. מספר האפשרויות לעשות זאת הוא $\binom{8}{2}$. לכן התשובה היא $\binom{5}{1}\binom{8}{2}$.