מטריצות הפיכות

הגדרה: מטריצה A נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה B כך ש $AB = BA = I$.
במקרה זה, מטריצה B נקראת **ההופכית** של A ומסומנת $B = A^{-1}$.

תכונות :

- מטריצה הפיכה היא בהכרח ריבועית
- אם A **ריבועית** ו$AB = I$ אזי גם $AB = BA = I$ וB הינה ההופכית של A
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

תרגיל 6.1 וחצי

הוכח שאם A הפיכה גם המשוחלפת שלה הפיכה ומתקיים ש $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.
הסק שאם A הפיכה וסמטרית אזי גם ההופכית שלה סימטרית .

[פתרון

נניח A הפיכה, אזי קיימת לה הופכית כך ש $AA^{-1} = I$.נשחלף את שני האגפים ונקבל $(A^{-1})^t A^t = I^t = I$ומכאן המש"ל כיוון ש Aריבועית וכך גם המשוחלפת שלה .

אם A הפיכה וסימטרית מתקיים $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}$כלומר ההופכית גם סימטרית .

מטריצות אלמנטריות

דיברנו כבר על פעולות שורה אלמנטריות כאשר דיברנו על פעולות שלא משנות את מרחב הפתרונות של המערכת המתאימה למטריצה. נזכיר מהן פעולות השורה האלמנטריות :

1. $R_i \leftrightarrow R_j$
2. $R_i \to \alpha R_i$, כאשר $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$
3. $R_i \to R_i + \alpha R_j$כאשר $i \neq j$

פעולת שורה היא למעשה פונקציה שניתן להפעיל על כל מטריצה. למשל נסמן את פעולת השורה $R_1 \to R_1 - R_2$באות ρאזי מתקיים לדוגמא :

$$\rho\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rho\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

מטריצות אלמנטריות

מטריצת שורה אלמנטרית היא מטריצה המתקבלת מהפעלת פעולת שורה אלמנטרית על מטריצת היחידה .

משפט: לכל מטריצה A מתקיים ש $\rho(A) = \rho(I)A$.

כלומר, הפעלת פעולת שורה אלמנטרית שקולה לכפל במטריצת השורה האלמנטרית המתאימה .

יש משפט והגדרה דומים עבור מטריצות עמודה אלמנטריות עם כפל בצד השני. כמו כן, כל מטריצת שורה אלמנטרית הינה מטריצת עמודה אלמנטרית עבור פעולה מתאימה. מטריצות אלה נקראות ביחד **מטריצות אלמנטריות** .

מסקנה - אלגוריתם למציאת מטריצה הופכית

דירוג מטריצה שקול לכפל במטריצות אלמנטריות המתאימות לפעולות הדירוג. לכן, אם דירגנו מטריצה ריבועית לצורת מטריצה היחידה קיבלנו $\rho_1(I)\cdots\rho_k(I)A = I$ ולפיכך מתקיים שהמטריצה A הפיכה וההופכית שלה הינה $\rho_1(I)\cdots\rho_k(I)$.

אם נדרג קנונית את מטריצת הבלוקים $(A|I)$ נקבל מטריצה מהצורה $(I|\rho_1(I)\cdots\rho_k(I))$ שכן לפי כפל מטריצת בלוקים, כפל במטריצה האלמנטרית מופעל במקביל על כל אחד מהבלוקים). לכן כאשר אנחנו מדרגים את $(A|I)$ עד שנקבל את מטריצת היחידה משמאל, מימין נקבל את המטריצה ההופכית $(I|A^{-1})$.

<u>דוגמא: (להראות את ההקבלה בין שניהם)</u>

ע"י פעולות שורה אלמנטאריות:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

או ע"י מטריצות שורה אלמטאריות:

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = I \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

בדיקה:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} = I$$

<u>**המטריצות ההופכיות של המטריצות האלמנטאריות:**</u>

נסמן:

$\rho_{i,j}(I)$ -המטריצה האלמנטארית המחליפה את שורות i ו-j.

$\rho_{k\cdot i}(I)$ -המטריצה האלמנטארית המכפילה את השורה ה-i ב-k.

ו- $\rho_{i+kj}(I)$ - המטריצה האלמנטארית המוסיפה לשורה ה-i k פעמים את השורה ה-j.

אזי:

$$\left(\rho_{i,j}(I)\right)^{-1} = \rho_{i,j}(I)$$

$\left(\rho_{k\cdot i}(I)\right)^{-1} = \rho_{\frac{1}{k}\cdot i}(I)$ (-קיים הופכי כי k מהשדה)

ו- $\left(\rho_{i+kj}(I)\right)^{-1} = \rho_{i-kj}(I)$

(גם הן מטריצות אלמנטאריות!)

ראינו שאם: $\rho_k \cdots \rho_1 A = I$ אז: $\rho_k \cdots \rho_1 = A^{-1}$.

<u>**מסקנה**</u>: $\rho_1^{-1} \cdots \rho_k^{-1} = A$

כלומר, כל מטריצה הפיכה ניתנת להצגה כמכפלת מטריצות אלמנטאריות.

6.18 תרגיל. יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש A הפיכה. הוכח שהמערכות $Bx=0$ ו $(AB)x=0$ שקולות (כלומר יש להן אותם פתרונות).

פתרון:

$$x\in\{v\in F^n : Bv=0\} \Rightarrow Bx=0 \Rightarrow A(Bx)=0 \Rightarrow (AB)x=0 \Rightarrow x\in\{v\in F^n : ABv=0\}$$

$$x\in\{v\in F^n : ABv=0\} \Rightarrow (AB)x=0 \Rightarrow A(Bx)=0 / \cdot A^{-1} \text{ משמאל} \Rightarrow Bx=A^{-1}\cdot 0 \Rightarrow x\in\{v\in F^n : Bv=0\}$$

6.25 תרגיל. תהא A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{C}$, כך שהמטריצה $A+A^2$ הפיכה. קבע איזה מהמטריצות $A, A+I$ היא הפיכה.

$$\exists D: D(A+A^2)=(A+A^2)D=I$$
$$\Rightarrow DA(I+A)=A(I+A)D=I \Rightarrow DA=(I+A)^{-1}, A^{-1}=(I+A)D$$

6.40 תרגיל. כפל של מטריצות בלוקים. יהיו $A\in\mathbb{F}^{a\times k}, B\in\mathbb{F}^{a\times m}, C\in\mathbb{F}^{b\times k}, D\in\mathbb{F}^{b\times m}$, ויהיו $X\in\mathbb{F}^{k\times c}, Y\in\mathbb{F}^{k\times d}, Z\in\mathbb{F}^{m\times c}, W\in\mathbb{F}^{m\times d}$. הוכח:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{(a+b)\times(c+d)}$$

פתרון:

1. ראינו בכיתה שעבור מטריצות C,B,A כך שהכפל מוגדר (כלומר מספר עמודות C מס' שורות B,A) מתקיים: $C(A\,|\,B)=(CA\,|\,CB)$.

2. שימו לב שבאותו אופן ניתן להסתכל על מטריצת הבלוקים $\begin{pmatrix} A \\ - \\ B \end{pmatrix}$ ומטריצה שלישית C כך שהכפל מוגדר (כלומר מספר שורות C מס' עמודות B,A) ויתקיים: $\begin{pmatrix} A \\ - \\ B \end{pmatrix}C=\begin{pmatrix} AC \\ - \\ BC \end{pmatrix}$.

ולכן, מהגדלים הנתונים ברור כי המכפלות מוגדרות ונקבל:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & | & Y \\ Z & | & W \end{pmatrix}\underset{\substack{\text{לפי}\\1}}{=}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}\right)=$$

$$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ - & - \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix} A & B \\ - & - \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}\right)\underset{\substack{\text{לפי}\\2}}{=}\overbrace{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\in F^{axc} & | & \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}\in F^{axd} \\ ------ & + & ------- \\ \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}\in F^{bxc} & | & \begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ W \end{pmatrix}\in F^{bxd} \end{pmatrix}}^{\text{בגלל המימדים הנתונים}}=$$

$$\begin{pmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{pmatrix}\in F^{(a+b)x(c+d)}$$