

## תרגיל בית 6

### שאלה 1

היעזר במבחן דריכלה וענה על הסעיפים הבאים:

#### סעיף א

לאילו ערכי  $p$  האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx \quad 2. \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \sin x}{x} dx \quad 3. \int_1^{\infty} \frac{\sin(x^3)}{x^p} dx$$

#### סעיף ב

הוכח שהאינטגרלים הלא אמיתיים הבאים מתכנסים:

$$1. \int_1^{\infty} \cos(x^2 + 1) dx \quad 2. \int_1^{\infty} \frac{\cos^3 x}{x} dx$$

### פתרון שאלה 1

#### סעיף א

$$g(x) = \frac{1}{x^p} \quad f(x) = e^{\sin x} \sin 2x;$$

לכל  $p > 0$  פונקציה  $g(x)$  מונוטונית יורדת ו  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$

נבדוק את התנאים של מבחן דריכלה בשביל פונקציה  $f(x)$ .

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b e^{\sin x} \sin 2x dx \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ \sin x = t \end{array} \right\} = 2 \left| \int_a^{\sin b} e^t dt \right| \leq 2 \int_a^1 e^t dt < 2e = K$$

תנאים של מבחן דריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

#### סעיף א

$$g(x) = \frac{(\ln x)^p}{x} \quad f(x) = \sin x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ מונוטונית יורדת. ו } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^2} (p - \ln x)$$

$g'(x) < 0$  לכל  $x > e^p$ , לכן פונקציה  $g(x)$  מונוטונית יורדת החל מ  $x > e^p$ .  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  לפי כלל לופיטל.

#### סעיף א

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^3)}{x^p} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ t = x^3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{p+2}{3}}} dt$$

$$g(t) = \frac{1}{t^{\frac{p+2}{3}}} \quad f(t) = \sin t; \quad \text{נסמן}$$

$g(t)$  מונוטונית יורדת ו  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$  לכל  $p > -2$ .

לכן אינטגרל מתכנס לפי מבחן דריכלה.

#### סעיף ב

$$\int_1^{\infty} \cos(x^2 + 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ x^2 + 1 = t \\ x = \sqrt{t-1} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_2^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t-1}} dt$$

$$. g(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}} \quad f(t) = \cos t; \text{ נסמן}$$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

### סעיף ב2

$$g(x) = \frac{1}{x}; \quad f(x) = \cos^3 x \text{ נסמן}$$

$$\left| \int_0^x \cos^3 t dt \right| = \left| \int_0^x (1 - \sin^2 t) d(\sin t) \right| = \left| \left( \sin t - \frac{\sin 3t}{3} \right) \Big|_0^x \right| \leq \frac{4}{3}$$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

### שאלה 2

עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים או מתבדרים:

$$\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx \quad \text{ג.} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \quad \text{ב.} \quad \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}} dx \quad \text{ה.} \quad \int_0^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ז.}$$

### פתרון שאלה 2

#### סעיף א

נשים לב ש  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} > 0$  לכל  $1 \leq x$  ואז ניתן להשתמש במבחן המנה.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ מתכנס.}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} dx \text{ מתכנס.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} : \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \cdot x\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

#### סעיף ב

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$$

נשים לב ש  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-2x} = -\frac{1}{2}$  האינטגרל  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$  הוא אמיתי, ולכן קיים וסופי.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx \text{ מתכנס.} \quad \text{נבדוק התכנסות האינטגרל} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx \text{ מספיק לבדוק האם האינטגרל} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2} dx \text{ מתכנס.}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx = \left[ -x \ln x + x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + b \ln b - b \right] = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

ז"א האינטגרל  $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$  מתכנס.

לכל  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$   $\frac{-\ln x}{1-x^2} > 0$  וניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

לכל  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  מתקיים  $\frac{-\ln x}{1-x^2} \leq \frac{-4 \ln x}{3}$ . מכיוון ש  $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$  מתכנס גם  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-4 \ln x}{3} dx$

ממבחן ההשוואה הראשון נקבל ש  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2} dx$  מתכנס וסה"כ  $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$  מתכנס.

### סעיף ג

ברור ש  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ , ולכן

$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) > 0$  החל מ  $x_0$  מסוים. לכן מותר להשתמש במבחן ההשוואה

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

האינטגרל  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  מתבדר, לכן גם האינטגרל  $\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$  מתבדר.

### סעיף ד

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

נבדוק האם  $\int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$  מתכנס.

בקטע  $0 \leq x \leq 1$  נקבל ש  $\frac{\pi}{4} \leq \arctan \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$  ואז  $\frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} > 0$  לכל  $0 \leq x \leq 1$  וניתן להשתמש

במבחן ההשוואה הראשון.

מתכנס. לכל  $0 \leq x \leq 1$   $\frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$  ז"א גם  $\int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$  מתכנס.

נבדוק האם  $\int_1^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$  מתכנס.

לכל  $1 \leq x$   $0 < \arctan \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{4}$  ואז  $\frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} > 0$  וניתן להשתמש במבחן המנה.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ מתכנס. } \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1/x} \text{ נשתמש במשפט לופיטל ונקבל ש}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{-1/x^2} = 1$$

האינטגרל מתכנס.

### סעיף ה

$$\int_2^{\infty} \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - x}} dx \text{ תחילה נשים לב שלכל } 2 \leq x \text{ מתקיים } 0 \leq \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ נשים לב תחילה ש}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 1 \text{ מתבדר. } \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ והאינטגרל שלנו מתבדר.}$$

### שאלה 3

עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים:

$$א. \int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}} dx \quad ב. \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x} \sin(tx) dx$$

### פתרון שאלה 3

#### סעיף א

נסמן  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ . הפונקציה מונוטונית יורדת,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  ופונקציית הנגזרת רציפה בקטע  $[2, \infty)$ .

נסמן  $g(x) = \sin x$ .

אז  $-1 \leq \cos x \leq 1$  ממשי מתקיים  $G(x) = \int_2^x \sin t dt = [\cos t]_2^x = \cos x - \cos 2$

$G(x)$  חסומה וכל תנאי משפט דריכלה מתקיימים כלומר האינטגרל  $\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}} dx = \int_2^{\infty} f(x)g(x) dx$  מתכנס.

נשאר לבדוק האם  $\int_2^{\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x-1}} dx$  מתכנס או מתבדר.

מכיוון ש  $\frac{|\sin x|}{\sqrt{x-1}} \geq 0$  ניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

נשים לב ש  $\sin^2 x \leq |\sin x|$  ואז  $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{|\sin x|}{\sqrt{x-1}}$ . אם נוכיח ש  $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} dx$  מתבדר אז גם

$\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{\sqrt{x-1}} dx$  והתשובה תהייה  $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}} dx$  מתכנס בתנאי.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx - \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$$

נבדוק האם  $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$  מתכנס או מתבדר.

נשים לב ש  $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 0$  לכל  $2 \leq x$ . ניתן להשתמש במבחן השוואה הראשון.

לכל  $2 \leq x$  מכיוון ש  $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$  מתבדר גם  $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$  מתבדר.

נבדוק האם  $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$  מתכנס או מתבדר.

נסמן  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ . הפונקציה מונוטונית יורדת,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  ופונקציית הנגזרת רציפה בקטע  $[2, \infty)$ .

נסמן  $g(x) = \cos 2x$ .

$$G(x) = \int_2^x \cos 2t dt = [-0.5 \sin 2t]_2^x = -0.5 \sin 2x + 0.5 \sin 4$$

אז  $-1 \leq \sin 2x \leq 1$  חסומה וכל תנאי משפט דריכלה מתקיימים כלומר האינטגרל

$$\int_2^\infty f(x)g(x) dx = \int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$$

סה"כ קיבלנו ש  $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$  מתבדר ו  $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$  ולכן

$$\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx - \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$$

## סעיף ב

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x} \sin(tgx) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ tgx = t \\ x = \arctgt \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \\ \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 + 1 \end{array} \right\} = \int_0^\infty \sin t \cdot \frac{\arctgt}{\sqrt{t^2 + 1}} dt$$

$$g(t) = \frac{\arctgt}{\sqrt{t^2+1}} \quad ; \quad f(t) = \sin t \quad \text{נסמן}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \arctgt = \frac{\pi}{2} \quad \text{כי } 0 - \text{ יורדת ל-}$$

$g(t)$  מונוטונית יורדת החל מ  $t_0$  מסוים כי

$$g'(t) = \frac{\frac{1}{1+t^2} \sqrt{1+t^2} - \arctgt \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t^2+1} = \frac{1-t \arctgt}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

החל מ  $t_0$  מסוים.

$$\int_0^{\infty} |\sin t| \frac{\arctgt}{\sqrt{t^2+1}} dt \sim \int_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס. התכנסות היא בתנאי כי

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt \quad \text{מתבדר ולכן אינטגרל } \int_0^{\infty} |\sin t| \frac{\arctgt}{\sqrt{t^2+1}} dt \quad \text{גם מתבדר לפי מבחן ההשוואה.}$$

#### שאלה 4

קבע לאילו ערכי  $p$  האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט ולאילו ערכי  $p$  האינטגרלים מתכנסים בתנאי:

$$\int_0^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx \quad \text{ב.} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx \quad \text{א.}$$

#### פתרון שאלה 4

##### סעיף א

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$$

באינטגרל הראשון נשתמש במבחן ההשוואה.

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx \sim \int_0^1 \frac{x^2}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}} \quad \text{לכן } \sin(x^2) \sim x^2 \quad (x \rightarrow 0)$$

האינטגרל  $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$  מתכנס אם ורק אם  $p < 3$

נחקור את האינטגרל השני  $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ t = x^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{p+1}{2}}} dt$$

האינטגרל השני בסכום  $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$  מתכנס בהחלט אם ורק אם  $\frac{p+1}{2} > 1 \Leftrightarrow p > 1$ .

האינטגרל השני בסכום  $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$  מתכנס בתנאי אם ורק אם  $0 < \frac{p+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 < p \leq 1$ .

התשובה: האינטגרל  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$  מתכנס

בהחלט אם ורק אם  $1 < p < 3$

בתנאי אם ורק אם  $-1 \leq p \leq 1$

### סעיף ב

$$\int_0^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx = \int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$$

באינטגרל  $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$  נשתמש במבחן ההשוואה.

$$\sin x \sim \ln(x+1) \sim x \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}} \quad \text{לכן,}$$

האינטגרל  $\int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}}$  מתכנס אם ורק אם  $p < 3$

לכן האינטגרל  $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$  מתכנס אם ורק אם  $p < 3$ .

נוכיח שהאינטגרל  $\int_1^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$  מתכנס לכל  $p > 0$  לפי מבחן דיריכלה.

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^p} \quad \text{נסמן}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x^p}{x+1} - px^{p-1} \ln(x+1)}{x^{2p}} = \frac{\frac{x}{x+1} - p \ln(x+1)}{x^{p+1}} < 0$$

החל מ-  $x_0$  מסוים לכן  $g(x)$  מונוטונית יורדת מ-  $x_0$  מסוים.

נוכיח עכשיו שאינטגרל  $\int_1^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$  מתכנס בהחלט רק עבור  $p > 1$ .

אם  $p \leq 1$  אזי  $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$  מתבדר ואז גם  $\int_1^{\infty} |\sin x| \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$  מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

### התשובה:

האינטגרל  $\int_0^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$  מתכנס

בהחלט אם ורק אם  $1 < p < 3$

בתנאי אם ורק אם  $0 < p \leq 1$