מבחן מועד ג' – 88-610 בדידה למורים – תשע"ז

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: דר' ארז שיינר תאריך: 13/07/17 חומר עזר: מותר מחשבון

הוראות: יש לענות על כל השאלות. כל שאלה שווה 24 נק'. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. תהיינה שתי פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר ש f <u>מתאימה</u> ל g אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}: f(x_1)=f\left(g(x_2)\right)$$

הפונקציה f <u>**אינה**</u> מתאימה ל g אם $\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}: f(x_1)\neq f\left(g(x_2)\right)$

א. האם $f(x)=x^2$ מתאימה ל $g(x)=e^x$?

יהי $x_1\in\mathbb{R}$ צריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(x_1)=f\left(g(x_2)\right)$, כלומר $x_1^2=\left(e^{x_2}\right)^2$

אבל עבור $x_1=0$ לכל $x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $0^2\neq\left(e^{x_2}\right)^2$ ולכן הפונקציה f <u>אינה</u> מתאימה ל g.

ב. האם $f(x)=e^x$ מתאימה ל $g(x)=x^2$?

יהי $x_1\in\mathbb{R}$ צריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(x_1)=f\left(g(x_2)\right)$, כלומר $e^{x_1}=e^{(x_2)^2}$

כלומר צריך למצוא x_2 עבורו $(x_2)^2=x_1$.

אבל עבור $x_1=-1$ לכל $x_2\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $e^{-1}\neq e^{(x_2)^2}$ ולכן הפונקציה f <u>אינה</u> מתאימה ל g.

ג. תהי פונקציה f. האם בהכרח f מתאימה לעצמה?

יהי $x_1\in\mathbb{R}$ צריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $f(x_1)=f\left(f(x_2)\right)$.

נבחר את הפונקציה $f(x)=e^x$, עבורה נקבל שצריך למצוא $x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $e^{x_1}=e^{e^{(x_2)}}$ כלומר $x_1=e^{x_2}$.

עבור $x_1=0$ לכל $x_2\in\mathbb{R}$ השיוויון לעיל אינו מתקיים, לכן הפונקציה הזו <u>אינה</u> מתאימה לעצמה.

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים כי $(A\cup B)\setminus C = A\cup(B\setminus C)$.

<u>הפרכה</u>: נבחר $A=B=C=\{1\}$. כעת $(A\cup B)\setminus C=\varnothing$, אך $A\cup(B\setminus C)=\{1\}$.

ב. לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\setminus B = B\setminus C$ אזי $A\subseteq B\subseteq C$.

<u>הוכחה</u>: ראשית נוכיח כי $A\subseteq B$.

יהי $x\in A$ צריך להוכיח כי $x\in B$. נב"ש ש $x\notin B$, לכן $x\in A\setminus B$ ולכן $x\in B\setminus C$ לפי הנתון.

לכן $x\in B$ בסתירה.

כעת נוכיח כי $B\subseteq C$.

יהי $x\in B$ נב"ש ש $x\notin C$ לכן $x\in B\setminus C$ ולכן $x\in A\setminus B$ לפי הנתון. לכן $x\notin B$ בסתירה.

ג. לכל שתי קבוצות A,B מתקיים כי $A\cup B\in P(A)\cup P(B)$.

<u>הפרכה</u>:

$A=\{1\},B=\{2\}$ הקבוצה $A\cup B=\{1,2\}$ אינה שייכת ל$P(A)$ וגם אינה שייכת ל$P(B)$.

3. תהי סדרה מוגדרת ע"י $a_1=2, a_2=4$ ונוסחת הנסיגה $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$.

הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי לכל n מתקיים כי $a_{n+1}+a_n$ מתחלק ב3.

עבור $n=1$ מתקיים כי $a_2+a_1=6$ אכן מתחלק ב3.

יהי n עבורו $a_{n+1}+a_n$ מתחלק ב3, צריך להוכיח כי $a_{n+2}+a_{n+1}$ מתחלק ב3.

אכן, $a_{n+2}+a_{n+1}=4a_{n+1}-4a_n+a_{n+1}=5(a_{n+1}+a_n)-9a_n$ הוא סכום של שני ביטויים המתחלקים ב3.

4. תהיינה שתי פונקציות $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם f על אז גם $f\circ g$ על.

<u>הפרכה</u>: נבחר את f להיות פונקצית הזהות, ו $g(n)=1$ פונקציה שאינה על.

f על אך $f\circ g=g$ אינה על.

ב. אם $f\circ g$ חח"ע ו g על אז גם f חח"ע.

<u>הוכחה</u>: $f\circ g$ חח"ע ולכן g חח"ע. כיוון ש g גם על נובע כי g הפיכה.

כעת $f=\left(f\circ g\right)\circ g^{-1}$ הרכבה של פונקציות חח"ע היא חח"ע.

ג. אם f חח"ע ו g על אזי גם $f+g$ חח"ע.

<u>הפרכה</u>: נבחר את f להיות הזהות, ו $g(n)=\begin{cases}2 & n=1\\ 1 & n=2\\ n & n>2\end{cases}$.

ברור כי f חח"ע (ולמעשה גם על) וכמו כן g על (ולמעשה גם חח"ע).

אבל $\left(f+g\right)(1)=\left(f+g\right)(2)=3$ ולכן $f+g$ אינה חח"ע.

5. בכמה דרכים יכול לחלק אבא 10 שקלים ל4 ילדיו:

א. כאשר כל ילד חייב לקבל לפחות שקל אחד.

ראשית נחלק לכל ילד שקל, ולכן נותרו לאב 6 שקלים לחלק לילדים.

הוא בוחר 6 פעמים מתוך 4 הילדים, בכל בחירה הוא מעניק לילד שקל. סדר הבחירה אינו משנה, ומותר לבצע חזרות.

לכן התשובה הינה $\binom{4-1+6}{4-1}=\binom{9}{3}$

ב. כאשר משה מקבל לפחות 6 שקלים, והדר מקבלת לפחות 2.

ראשית נחלק למשה 6 שקלים, ולהדר 2. נותרו 2 שקלים לחלק ל4 ילדים ולכן התשובה הינה

$$\binom{4-1+2}{4-1}=\binom{5}{3}$$

ג. כאשר אף ילד לא מקבל יותר מ5 שקלים.

נסמן ב A_i את קבוצת האפשרויות בהן ילד מספר i קיבל עד 5 שקלים, וב U את קבוצת כל האפשרויות לחלק שקלים לילדים.

אנחנו רוצים למצוא את $|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=|U|-|\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup\overline{A_4}|$

כעת $|U|=\binom{4-1+10}{4-1}$ ונשתמש בנוסחת ההכלה וההדחה על מנת לחשב את הביטוי השני.

עבור ילד אחד, $|\overline{A_i}|$ הוא כמות האפשרויות בהם הילד הזה מקבל יותר מ5 שקלים, כלומר לפחות 6. לכן

$|\overline{A_i}|=\binom{4-1+4}{4-1}$.

לכל שני ילדים $|\overline{A_i}\cap\overline{A_j}|=0$ כיוון שלא ייתכן ששני ילדים קיבלו **יותר** מ5 שקלים (סה"כ יש 10 שקלים).

לכן כל החיתוכים בנוסחת ההכלה וההדחה הם אפס, ולכן

$$|\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup\overline{A_4}|=|\overline{A_1}|+|\overline{A_2}|+|\overline{A_3}|+|\overline{A_4}|=4\binom{4-1+4}{4-1}$$

נוסחאות הבחירה:

k מתוך n	עם סדר	בלי סדר
עם חזרה	n^k	$\binom{n-1+k}{n-1}$
בלי חזרה	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$