

# 1) Singular Value deco...=) SVD פירוק

גורם:  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$  קיים פירוק סגולרי  $A = U \Sigma V^T$

כאשר:  $U \in \mathbb{F}^{m \times m}$  אורתוגונלי

$V \in \mathbb{F}^{n \times n}$  אורתוגונלי

$$\Sigma = \left( \begin{array}{c|c} \sigma_1 & \\ \vdots & \\ \sigma_r & \\ \hline & 0 \end{array} \right)$$

כאשר:  $\Sigma \in \mathbb{F}^{m \times n}$

$\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_r > 0$  - הערכים

הסגולריים של  $A$

$r = \text{rank } A$  מספר

איך מוצאים את הפירוק הסגולרי של מטריצה נתונה?

תשובה:

הראינו כיצד שלב  $A$  המטריצה:  $A^T A$  היא

סימטרית - יש חוקים ( $0 \leq \lambda$ ) ולכן קיים זה פירוק אורתוגונלי. אם נמצא את הפירוק של  $A^T A$

יחס לנו כי:

$$A^T A = (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T$$

$$= V \underbrace{\Sigma^T \Sigma}_D V^T = V D V^T$$

כך נמצא גם את  $V$  ו- $D$  גם את  $\Sigma$

כאן אפשר לבדוק  $A A^T$  שקל:

$$A A^T = (U \Sigma V^T) (U \Sigma V^T)^T = U \underbrace{\Sigma \Sigma^T}_S U^T$$

$$= U S U^T$$

אם אתה נמצא את  $A A^T$  של  $U$  אתה מוצא את  $S$



2

$$\text{rank } A = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

רצף  
18

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$$

$A^T A$  מטריצה ולכן קיים לה פולינום אופייני:

הפולינום האופייני שלה (המסו) הוא:  $(x-18)x$

פר  $\lambda_1 = 18$   $\lambda_2 = 0$  : ע"כ

$\downarrow$   
ע"כ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$   
ע"כ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ה"כ מרחב מאונכים

של  $A^T A$  מטריצה

פר  $V$  ו  $U$  הם כיוונים אלה ולכן  $V - U$  אורתוגונלי

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma^2$$

$\Downarrow$

$A$  צורה אפילו של  $\Sigma$

$r(A) = 1$  היא המדרג

יש לה רק ע"כ  $0 \neq$

ואילו נוסף קטנה השפעה  
העליונה

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כך נקבע  $U$  ו  $V$  אורתוגונליים



3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 8 & -8 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix} : AA^T \quad \text{משפט ניל}$$

הפולינום המינימלי  $P_u(x) = x^2(x-18)$

רק נראה לפי שהמינימלי האמיתי של  $x$  חייב להיות 2  
 כי המינימלי מדרגה 1:  $\dim N(A) + \text{rank } A = 3$

$\lambda = 0$   $\lambda = 18$

$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{45} \\ 4/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

ישם תחום של תוֹף של תוֹף  $0 \neq$  משתנים  
 במינימלי  $u$  לפי הסדר משתנים אינן - מוגדרת וקטור

ואכן:

$$U = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 1/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{pmatrix}$$

ישנה גם בקר אחידה יותר למצב  $u$  ופירוט ומתקיים  $\frac{Av_i}{\sigma_i} = u_i$   
 עבור  $\sigma_i \neq 0$  ניתן לחזקו בהשוואה ולקבל את  $u$ . אזכור  
 יש רק אחד כזה. כי  $u$  היא מינימלי אורתוגונלית ניתן  
 למצוא את השאר על מציאת אחד נוסף לכל גופי  $\sigma_i$ .  
 כן קצר יותר קצר... בהצלחה