תרגיל בית 10 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1 (חימום).

א. ודאו כי $\mathbb{Z}_{12}/\langle 3\rangle \cong \mathbb{Z}_3$ באופן ישיר, על ידי כתיבת כל איברי חבורת המנה ואת לוח הכפל שלה.

ב. הסבירו מה הבעיה בטענה "$\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_3$" (רמז: מספיק משפט אחד).

ג. תנו דוגמה ל-$n \geq 3$ שעבורו $\mathbb{Z}_n/\langle 3\rangle \ncong \mathbb{Z}_3$.

שאלה 2. הוכיחו את האיזומורפיזמים הבאים באמצעות משפט האיזומורפיזמים הראשון (או בכל דרך אחרת):

א. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle \cong \mathbb{Z}$

ב. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(2,2)\rangle \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$

ג. $\mathbb{C}^*/\mathbb{T} \cong \mathbb{R}_+$
כאשר $\mathbb{T} = \{z\in\mathbb{C} \,|\, |z|=1\}$ ו-$\mathbb{R}_+ = \{x\in\mathbb{R} \,|\, x>0\}$ לגבי הפעולה של כפל רגיל.

שאלה 3. הפריכו את הטענות <u>השגויות</u> הבאות:

א. אם חבורת המנה ${}^{G}/_{N}$ ציקלית ולא טריוויאלית, אז G אבלית.

ב. אם חבורת המנה ${}^{G}/_{N}$ סופית ולא טריוויאלית, אז G סופית.

ג. אם תת־החבורה $N \lhd G$ וחבורת המנה G/N אבליות, אז G אבלית.

שאלה 4. לחבורה $G = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ יש בדיוק שבע תת־חבורות מאינדקס 4. מצאו לפחות שלוש מהן והוכיחו שחבורות המנה לגביהן לא תמיד איזומורפיות.

אתגר רשות: מצאו את כל תת־החבורות מאינדקס 4 ואת חבורות המנה לגביהן.

שאלה 5. תהי G חבורה ותהיינה H,K תת־חבורות נורמליות המקיימות $H\cap K=\{e\}$. הוכיחו כי G איזומורפית לתת־חבורה של ${}^{G}/_{K}\times{}^{G}/_{H}$.

שאלה 6. תהיינה $G_1,\dots,G_n$ חבורות ותהיינה $H_1,\dots,H_n$ תת־חבורות נורמליות שלהן, בהתאמה (כלומר $H_i \lhd G_i$ לכל i).

א. הוכיחו כי $H_1\times\cdots\times H_n \lhd G_1\times\cdots\times G_n$.

ב. הוכיחו כי $(G_1\times\cdots\times G_n)\,/\,(H_1\times\cdots\times H_n) \cong G_1/H_1\times ... \times G_n/H_n$.

שאלה 7. נתבונן בחבורה $G = {}^{\mathbb{Q}}/_{\mathbb{Z}}$.

א. הוכיחו שהסדר של כל איבר ב-G הוא סופי, אבל שישנם איברים בחבורה מסדר גדול כרצוננו.

ב. הוכיחו או הפריכו: $G \cong \mathbb{Q}$.

ג. לקבוצת איברים $S \subseteq G$ נסמן את תת־החבורה הקטנה ביותר של G שמכילה S בסימון $\langle S\rangle$, ונאמר שהיא תת־החבורה הנוצרת על ידי S ב-G. התבוננו בתת־החבורה $H = \left\langle \frac{2}{5}+\mathbb{Z}, \frac{5}{6}+\mathbb{Z}\right\rangle$. הוכיחו כי H היא ציקלית ומצאו את האינדקס $[G:H]$.
רמז: למעשה רוצים למצוא $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ כך ש-$H = \left\langle \frac{a}{b}+\mathbb{Z}\right\rangle$, ולוודא הכלה דו־כיוונית.

ד. מצאו קבוצת איברים $S \subseteq G$ כך שתת־החבורה $K = \langle S\rangle$ היא אינסופית וגם $K \neq G$.
רמז: למה S חייבת להיות אינסופית?

שאלה 8. יהי $f\colon G \to H$ איזומורפיזם.

א. הוכיחו שלכל תת־חבורה $K \leq G$ מתקיים כי $K \lhd G$ אם ורק אם $f(K) \lhd H$.
כלומר איזומורפיזם שומר על נורמליות של תת־חבורות.

ב. הוכיחו שלכל תת־חבורה נורמלית $N \lhd G$ מתקיים כי $G/N \cong H/f(N)$.

שאלות רשות

נצטט את משפטי האיזומורפיזמים השני והשלישי של נתר, ואז נוכיח אותם. לא לדאוג – יש הדרכה.

משפט (משפט האיזומורפיזמים השני)**.** תהי G חבורה, תהי $H \leq G$ תת־חבורה, ותהי $N \lhd G$ תת־חבורה נורמלית. אזי $H \cap N \lhd H$, $N \lhd HN$, וכן

$$^{HN}\!/_{N} \cong {}^{H}\!/_{H\cap N}$$

משפט (משפט האיזומורפיזמים השלישי)**.** תהי G חבורה, ותהיינה $H, K \lhd G$ תת־חבורות נורמליות של G כך ש-$K \subseteq H$. אזי

$$^{(G/K)}\!/_{(H/K)} \cong {}^{G}\!/_{H}$$

שאלה 9. הוכיחו את משפט האיזומורפיזמים השני: יהיו G, H ו-N כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f\colon H \to {}^{HN}\!/_{N}$ לפי $f(h) = hN$.

א. הראו ש-f הומומורפיזם.

ב. הראו ש-f על.

ג. הוכיחו כי $\ker f = H \cap N$.

ד. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון.

שאלה 10. הוכיחו את משפט האיזומורפיזמים השלישי: יהיו G, H ו-K כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f\colon {}^{G}\!/_{K} \to {}^{G}\!/_{H}$ לפי $f(gK) = gH$.

א. הוכיחו ש-f מוגדרת היטב. כלומר אם $g_1K = g_2K$, אז $f(g_1K) = f(g_2K)$.

ב. הראו ש-f הומומורפיזם.

ג. הראו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f = {}^{H}\!/_{K}$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון.

שאלה 11. חבורה G נקראת מטא־אבלית אם יש לה תת־חבורה נורמלית N כך שגם N וגם ${}^{G}\!/_{N}$ אבליות. הוכיחו שכל תת־חבורה של חבורה מטא־אבלית היא גם מטא־אבלית. רמז: נסו להשתמש באחד ממשפטי האיזומורפיזמים.

בהצלחה!