

## בחינה סופית בחשבון אינפיניטסימלי 2 מדמ"ח – 89-133

### מועד ב' תשע"ה

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס, ד"ר יהודה שנפס

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשבון

### ענו על כל השאלות

1. הוכח את האי־שוויונות הבאים:

(א)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+(n+1)^2} \leq \frac{\pi}{2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

(ב)

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n} \leq \ln N \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$$

(ג) הוכח שהגבול

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(N) \right] = \gamma$$

קיים, ושהוא מקיים  $0 \leq \gamma \leq 1$ .<sup>1</sup>  
(רמז: תחשבו על האינטגרלים  $\int \frac{dx}{x}$ ,  $\int \frac{dx}{1+x^2}$ .)

---

<sup>1</sup>המספר  $\gamma$  נקרא קבוע אוילר-מאשרוני, וערכו האמיתי הוא בקירוב  $\gamma \approx 0.5772 \dots$ .

2.

(א) הוכח: אם  $f$  אינטגרבילית על  $[a, b]$ , אזי הפונקציה

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

רציפה על  $[a, b]$ .

(ב) הוכח: אם  $f$  רציפה על  $\mathbb{R}$ , אזי הסדרה

$$f_n(x) = n \int_{t=0}^{t=\frac{1}{n}} f(x+t) dt$$

מתכנסת ל- $f$  במידה שווה על כל קטע סגור  $a \leq x \leq b$ .

3.

(א) הוכח שלכל  $n \geq 0$  מתקיים

$$\left| \int_0^1 \sin(nx) \cos(583x) dx \right| \leq \frac{n+1}{583}$$

האם ניתן להחליף את  $\sin(nx)$  בכל פונקציה  $f$  המקיימת

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ |f(1)| &\leq 1 \\ \sup_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| &\leq n \end{aligned}$$

באי-שוויון הנ"ל?

(ב) הוכח שלכל  $n > 0$  מתקיים

$$\left| \int_0^1 \sin^2(nx) \cos(nx) dx \right| \leq \frac{1}{n}$$

4. לכל אחד מהאינטגרלים הבאים, קבע האם האינטגרל מתכנס או מתבדר:

(א)

$$\int_0^{\infty} \sin^2(x) dx$$

(ב)

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$

(ג)

$$\int_0^{\infty} \sin(\sqrt{x}) dx$$

5. יהי

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2+n}$$

מצא תחום התכנסות הטור, והוכח כי

$$(x^2 f(x))' = \frac{x}{1-x}$$

באיזה תחום השוויון הזה תקף? הסבר!

6. מצא מקסימום ומינימום מוחלטים של הפונקציה

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3$$

בתחום האליפסה

$$4x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq 3$$

**בהצלחה רבה!**