ראובן כהן
בניין 216 (מתמטיקה) חדר 215
טל' 7403 או 050-5917779
reuven@math.biu.ac.il
http://u.math.biu.ac.il/~reuven

19/9 – מבחן

נושא – משוואות דיפרנציאליות רגילות!

ספר: אב"ר של האוניברסיטה הפתוחה.

אב"ר /שווירס/ שאום.

אנליזה קלאסית /אלשמן.

הגדרות:

① משוואה דיפרנציאלית: משוואה המקשרת משתנה בלתי תלוי (x) או מס׳ משתנים בלתי תלויים עם הפונקציה הנעלמת $y(x)$ ונגזרותיה $y^{(n)}(x)$.

② מד״ר: $F(x, y(x), y'(x),\dots,y^{(n)}(x))=0$

③ מד״ח: $F(x, y, z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dots)=0$

④ סדר של מד״ר: סדר הנגזרת הגבוהה ביותר המופיעה במשוואה

⑤ מעלה של מד״ר: אחרי החלקה מרדיקלים מעלת הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר.

דוגמאות:

1. $2xy'-3y=0 \iff 2xdy-3ydx=0$
2. סדר ראשון מעלה ראשונה.
3. סדר שני מעלה ראשונה $2y''+3x^2y=0$
4. סדר ראשון מעלה שנייה $x^2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(1+x^3)=0$
5. סדר שני מעלה שנייה $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=2y+x$
6. סדר 3 מעלה 1. $\frac{d^3y}{dx^3}+x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$

משוואה: $y^2+x^2=R^2$ ← צורה סתומה, ורצה צורה מפורשת

$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$ ← משוואה דיפרנציאלית מסדר 0

למשל: $e^y+y=x$ ← אין הצגה מפורשת.

$$y'=2x+3$$

$$y=\int(2x+3)=x^2+3x+C$$

לפעמים זה מופיע בצורה סתומה:

$$(y')^2+xy'+3=0$$

$y'=\frac{-x\mp\sqrt{x^2-12}}{2}$ ואז לעשות אינטגרציה

פתרון:

פונקציה זו לא ניתנת לביטוי כפונקציה אלמנטרית.

$$y' = e^{-x^2}$$

$$y = \int e^{-x^2}\,dx = erf(x) + C$$

גם אם לא היה שם, לא נחשב פתרון אחר.

F - פונקציה של n+2 משתנים

(6) מד"ר נורמלית: $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}(x)) = 0$

כאשר $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ והפיתרון נכון לכל $x \in D$.

אם ניתן לכתוב את המד"ר בצורה:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

אזי קוראים למשוואה מד"ר נורמלית / סטנדרטית כאשר f פונקציה של n+1 משתנים.

אם $F(x, z_0, \dots, z_n)$ לינארית במשתנים $z_0, \dots, z_n$

או ש $f(x, z_0, \dots, z_{n-1})$ ניתנת להירשם בצורה:

$$f(x, \dots) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) z_i$$

אזי המד"ר נקראת מד"ר לינארית מסדר n.

דוגמא:

מד"ר בצורתה הכללית יכולה להיות: $e^{y'''} + 3y''x^2 + 8x + \sin(y) = 0$

עבור אותה בצורה נורמלית: $\underline{y'''} = \ln\left(-(3y''x^2 + 8x + \sin(y))\right)$

המד"ר הנ"ל היא לא לינארית, צריכה שכל הנגזרות של y יהיו לינאריות!

אך המשוואה:

$$y^{(4)} + \underbrace{(x^3 \sin x)}_{\text{לא מעניין הלינאריות של } x} y^{(3)} + y' + \frac{y}{8x} = 0$$

כן לינארית!

כאן אין פתרון מעל ~~המרוכבים~~ הממשיים! $(y')^2 + x^2 = -2$

אבל כן מעל המרוכבים.

## פתרון של מד"ר

פתרון של מד"ר נקראת פונקציה $y=\varphi(x)$ כך שאם נציב במשוואה במקום הפונקציה הנעלמת נקבל זהות:

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0$$

דוגמה:

$y=\varphi(x)=x^2$ .

פתרון של: $xy'-2y=0$

$x(2x)-2x^2=0$ ✓

נשים לב, שגם $y=cx^2$ פתרון של המשוואה.

הפתרון הזה נקרא: פתרון כללי

| |
|---|
| פתרון כללי: |
| נקרא $y=\varphi(x, c_1, \dots, c_n)$ הדיפרנציאבילית n פעמים לפי x ותלויה ב-n קבועים $c_1, \dots, c_n$ . |

דוגמה:

מד"ר $\rightarrow$ $y''=x+1$

$$\frac{d}{dx}(y')=x+1$$

$$y'=\int x+1\,dx=\frac{x^2}{2}+x+c_1$$

$$y=\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$$

$\rightarrow$ זה הפתרון הכללי ביותר מהמשפט היסודי של החדו"א.

$\downarrow$ מתוארות כל הפתרונות של המד"ר

## מד"ר מסדר I :

$$F(x,y,y')=0$$

בצורה נורמלית : $y'=f(x,y)$

① $xy'=x+y$

② $y'=\frac{y}{x}$

③ $y' \quad x^2y=0$

ניתן לרשום גם בצורה דיפרנציאלית:

③ $y'+x^2y=0 \quad /\cdot dx$

$\frac{dy}{dx}+x^2y=0 \quad \to \quad \underbrace{y'dx}_{dy}+x^2y\,dx=0$

$x^2y\,dx+dy=0$

$$\boxed{\begin{aligned} y'&=\frac{dy}{dx} \\ y'dx&=dy \end{aligned}}$$

② $y'=\frac{y}{x} \qquad x\neq 0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

$y\,dx-x\,dy$

בדר"כ למד"ר אינסוף פתרונות, ע"י נוסחא עם פרמטר כלשהו
הפונקציה : $y=\varphi(x,C_0)$ המתקבלת ע"י הצבה של ערך כלשהו
לפרמטר $C_0$ נקרא : פתרון פרטי !

משוואות כמו $y=x^2+c$ נקראות עקומות אינטגרליות כי הן מתקבלות
ע"י אינטגרציה. פתרון פרטי הוא הפונקציה הנ"ל העוברת דרך נקודה
נתונה.

הבעיה של קושי : למצוא פתרון של מד"ר מסדר I המקיימת תנאי
התחלה : $y|_{x=x_0}=y_0$

זה נקרא גם בעית התחלתיות או בעיית תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$$

פתרון רגולרי וסינגולרי

אם אוסף הפתרון ניתן לקבל לערך מסויים של קבוע הוא נקרא

פתרון רגיל פרטי רגולרי

כלומר: מ- $y=\varphi(x,c)$

נקבל את $y=\varphi(x,c_0)$

אם אי-אפשר לקבל את הפתרון מהפתרון הכללי לאף ערך קבוע.

הוא נקרא פתרון מיוחד/סינגולרי.

דוגמא:

(1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$

פתרונה: $y=(x+C)^2$

פתרון נוסף: $y=0$ - סינגולרי.

(2)

$$y'=\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=dx$$

$$\arcsin(y)=x+C$$

פתרון כללי ← $y=\sin(x+c)$

$y=\mp 1$ ← פתרונות סינגולריים.

(3)

$$y=\begin{cases}\sin(x) & x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

## תנאי ליפשיץ

פונקציה $f(x)$ מקיימת את תנאי ליפשיץ בתחום $[a,b]$ אם קיים $C$ כך שלכל $x_1,x_2 \in [a,b]$ מתקיים:

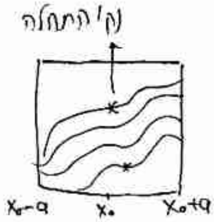
$$|f(x_1)-f(x_2)| < C|x_1-x_2|$$

## משפט הקיום והיחידות

תהי $y'=f(x,y)$ מד"ר נורמלית ומקיימת תנאי ליפשיץ ב-$\underline{y}$, בתיבה: $\{(x,y): |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$

אזי למד"ר קיים פתרון אחד ויחיד $y=y(x)$ בתחום $|x-x_0|\le a'$ כאשר: I. $y(x_0)=y_0$

$$a'=\min\left(a,\ \frac{b}{\max f(x,y)}\right) \quad \text{II}$$




* משפט זה הוא עבור מד"ר + תנאי התחלה.

סיווג של מד"ר מסדר I ושיטות פיתרון

מד"ר עם משתנים מופרדים:

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \quad /: f_2(y) \qquad f_2(y)\neq 0$$

$$\frac{y'}{f_2(y)} = f_1(x)$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c$$

דוגמא 1

$$2xy + y' = 0$$

$$y' = -2xy \quad /: y \qquad y\neq 0$$

$$\frac{y'}{y} = -2x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx + c$$

$$\ln|y| = -x^2 + c$$

$$|y| = e^{-x^2+c}$$

נגדיר: $c' = e^c \quad c'>0$

$$|y| = c'\cdot e^{-x^2}$$

$$\boxed{y = c''e^{-x^2}} \rightarrow$$ פתרון כללי $\quad c''\neq 0 \rightarrow y\neq 0$ כי

$c'\in\mathbb{R}$

במקרה של $y=0$ אזי $c'=0$ והוא כלול בפתרון הכללי.

הוא רגולרי, כי לכל $x$ נקבל $0$.

דוגמא 2

$$2x\,dx + e^{-y^2}dy = 0$$

$$\int 2x\,dx + \int e^{-y^2}dy = c$$

$$x^2 + \int e^{-y^2}dy = c$$ קיבלנו פונק' סתומה שמקשרת בין $x$ ל-$y$

מפורש יותר:

$$2x + e^{-y^2}y' = 0$$

$$\int (2x + e^{-y^2}y')dx = C$$

$$\int 2x\,dx + \int e^{-y^2}y'dx = C$$

$$dy = y'dx$$

צורה כללית של מד"ר עם משתנים מופרדים:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

אם $N_1(y_0)=0$ אזי $y(x)=y_0$ פתרון של המד"ר (ה-$dy$ מתאפס גם כי ה-$y$ קבוע)

אם $M_2(x_0)=0$ אזי $x(y)=x_0$ פתרון של המד"ר

אם $N_1(y)\cdot M_2(x)\neq 0$ ניתן לחלק את המד"ר במכפלתם ולקבל:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

וזוהי מד"ר מופרדת

**דוגמא 3**

$$x^2\cdot y^2\cdot y' = y-1$$

$$x^2 y^2 dy - (y-1)dx = 0$$

$$M_2(x)=x^2 \qquad N_2(y)=y^2$$

$$M_1(x)=1 \qquad N_1(y)=-(y-1)$$

$y=1$ פתרון

$x=0$ פתרון

פונקציה היא פתרון למד"ר ולא נקודה!

נחלק את המשוואה ב- $(y-1)x^2$

$$\frac{y^2y'}{y-1} = \frac{1}{x^2}$$

$$\int \frac{y^2dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2} + c$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|(y-1)| = -\frac{1}{x} + c$$

נכתוב את $x$ כפונק' של $y$:

$$x = \frac{1}{c - \left(\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1|\right)}$$

עבור $c \to \infty$ נקבל $x=0$

$y=1$ ← סינגולרית.

מד"ר פתרונות של משוואות עם משתנים מופרדים

$$(*) \quad y' = f(ax+by)$$

כאשר $f(z)$ פונקציה רציפה במשתנה אחד.

$(**)$ נשתמש בהחלפת משתנים. נעבור ל $z$ להיות: $z = ax+by$

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

$$(*) \quad \frac{1}{b}(z'-a) = \underset{y'}{\overset{\shortparallel}{f(z)}}$$

נוכל לכתוב:

$$z' = bf(z) + a \qquad /: bf(z)+a$$

$$\int \frac{dz}{bf(z)+a} = \int 1\,dx + C = x + C$$

נציב ב- $(**)$ $\quad y = \frac{z-ax}{b}$

דוגמא:

$$y' = \frac{1-x+y}{x-y}$$

$$y' = \frac{1-(x-y)}{x-y}$$

נגדיר: $z = x-y$

$z' = 1-y'$

$$z' = 1-y'$$

$$1-z' = \frac{1-z}{z}$$

$$z' = 1 - \frac{1-z}{z} = \frac{z-1+z}{z} = \frac{2z-1}{z}$$

$$\frac{z\cdot z'}{2z-1} = 1$$

נזכור ש- $z$ פונקציה של $x$ לכן:

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{z}{2z-1}\,dz = x + C$$

$$\int \frac{z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2z-1}\,dz = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2z-1}\right) dz$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{1}{4}\ln|2z-1| = x + C$$

נציב חזרה:

$$\frac{x-y}{2} + \frac{1}{4}\ln|2(x-y)-1| = x + C$$

מד"ר הומוגניות מסדר (I): ← מד"ר מסדר I.

הגדרה:

$f(x,y)$ נקראת הומוגנית מסדר $k$ אם לכל $\lambda \neq 0$ מתקיים השוויון הבא: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$

דוגמה: $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y} = \frac{x-y}{x+y} = \lambda^0 \cdot f(x,y)$$ ← הומוגנית מסדר 0

$$f(x,y) = \frac{x^2+xy}{x-y} = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 xy}{\lambda(x-y)} = \lambda^1 f(x,y)$$ ← הומוגנית מסדר 1

$$f(x,y) = x^2+y^2-xy = \lambda^2 f(x,y)$$ ← הומוגנית מסדר 2

משפט:

פונקציה $f(x,y)$ ניתנת לרשום בצורה $\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \iff$ $f$ הינה הומוגנית מסדר 0.

הוכחה:

$\Leftarrow$ אם $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ אזי $f(\lambda x, \lambda y) = \varphi\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$
הומוגנית מסדר 0 ← $= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = f(x,y)$

$\Rightarrow$ נניח $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0.
עבור $x,y$ נתונים, נבחר $\lambda = \frac{1}{x}$ (או $x = -\frac{1}{x}$ אם $x<0$)
מההומוגניות, $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$

$$f(\lambda x, \lambda y) = f\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

אם ניתן להציג את המד"ר $y' = f(x,y)$ בצורה $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
אזי המד"ר נקראת הומוגנית (לא נכון לומר כי $f$ הומוגנית מסדר 0)
המד"ר עצמה לא מסדר 0 אלא מסדר 1 $(y')$

מה הטכניקה? במקרים שנקבל משוואה מהצורה $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

נסמן $\frac{y}{x}=z(x)$

$$y=z(x)\cdot x$$

$$y'=z'\cdot x+z$$

נציב במשוואה:

$$z'\cdot x+z=f\left(\frac{y}{x}\right)=f(z)$$

$$\frac{dz}{dx}=z'=\frac{f(z)-z}{x}$$

$$\frac{dz}{f(z)-z}=\frac{dx}{x}$$

$\ln|x|+\ln c'$ $\quad$ $\ln(c')=c$

$$\int\frac{dz}{f(z)-z}=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+c=\ln(c'\cdot x)$$

נציב: $y=z\cdot x$

דוגמא:

$$x\,dy=(x+y)\,dx$$

$$y'=\frac{x+y}{x}=\frac{x}{x}+\frac{y}{x}=1-\frac{y}{x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z'x+z=1+z$$

$$z'=\frac{1+z-z}{x}=\frac{1}{x}$$

$$\int dz=\int\frac{dx}{x}+c$$

$$z=\ln(cx)=\ln|x|+c$$

$$y=x\ln(cx)=x\ln|x|+c$$

נוכל להציב במשוואה ב-$y$ את $y$.

תנאי התחלה $\quad y(3)=8$

$$8=3\ln(3c)$$

$$3c=e^{8/3}$$

$$c=\frac{e^{8/3}}{3}\qquad y=x\ln\left(\frac{e^{8/3}}{3}x\right)$$

פתרון:

נניח שווי המשכנתא $y(t)$

נניח שבפרק זמן $\Delta t$ המשכנתא צוברת ריבית $Ry\Delta t$ וכן מתבצע תשלום $p\Delta t$ אזי המשכנתא מקיימת:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + R\cdot y\cdot \Delta t - p\Delta t$$

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = Ry - p$$

$$y' = Ry - p$$

$$\frac{dy}{dt} = Ry - p \Rightarrow \frac{y'}{Ry-p} = 1$$

$$\int \frac{y'\,dt}{Ry-p} = \int 1\, dt$$

$$\int \frac{dy}{Ry-p} = t + c$$

$$\frac{1}{R} \ln|Ry-p| = t + c$$

$$Ry - p = ce^{Rt}$$

$$y = \frac{p + Ce^{Rt}}{R}$$

נניח תנאי התחלה:

$$y(0) = M$$

$$M = \frac{p + Ce^{0}}{R}$$

$$C = RM - p$$

אם נסתכל על שווי המשכנתא כפונק' של הזמן

$$\boxed{y = \frac{p}{R} + \left(M - \frac{p}{R}\right)e^{Rt}}$$