אלגברה מופשטת 3 – שדות

1. יהיה F שדה עם מאפיין שונה מ- 2 ו- $a,b\in F$ כך ש- $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq 0$.
הוכיחו: $F\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=F\left(\sqrt{a},\sqrt{b}\right)$.

2. הראו $\mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right)\neq\mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{-7}}{2}},\sqrt{\frac{3-\sqrt{-7}}{2}}\right)$.
מהו מימד ההרחבה מעל $\mathbb{Q}$ בכל אחד מהצדדים?

3. הראו שאם $a,b\in\mathbb{Z}$ זרים ואינם ריבועים, אזי $\left[\mathbb{Q}\left[\sqrt{a},\sqrt{b}\right]:\mathbb{Q}\right]=4$.

4. הראו ש $\sqrt{2}$ הוא ריבוע מעל $\mathbb{R}$ אך אינו ריבוע מעל $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$.

5. יהי F שדה עם מאפיין p. הראו שהפולינום $p(x)=x^p-x-a$ אי-פריק אם ורק אם אין לו שורש ב- F.

6. תהי K/F הרחבת שדות (לאו דוקא סופית). הראו שהתנאים הבאים שקולים:
א. כל שיכון של K בתוך סגור אלגברי $\bar{K}/K$ הוא אוטומורפיזם של K.
ב. K הוא שדה פיצול של כל הפולינומים במשפחה (לאו דוקא סופית) של פולינומים.
ג. כל פולינום אי-פריק ב $F[x]$ שיש לו שורש מעל K מתפצל מעל K.

הרחבה המקיימת את אחד התנאים השקולים האלו נקראת הרחבה נורמלית.

7. יהי $F/\mathbb{Q}$ שדה הפיצול של פולינום אי-פריק $f(x)\in\mathbb{Q}[x]$.
הראו שאם $[F:\mathbb{Q}]$ אי-זוגי אזי ל $f(x)$ יש רק שורשים ממשיים.