<u>תרגילים פתורים בנושא בדיקת השערות (הפתרונות בסוף)</u>

1. במדגם של 100 מכוניות נמצא שמכונית עוברת בממוצע של 14,500 ק"מ לשנה, עם סטיית תקן 2,400 ק"מ. בהנחה כי סה"כ הק"מ השנתי מתפלג נורמלית, האם נוכל להסיק באופן מובהק, כי בשנה נוסעים יותר מ- 12,000 ק"מ, ברמת מובהקות של $\alpha = 1\%$. (ערוך את המבחן המתאים ונתח תוצאותיו).

2. חוקר מבצע מבחן לבדיקת ההשערות $H_0 : \mu \le 100$ כנגד $H_0 : \mu > 100$ בעזרת מדגם בגודל $n = 225$. נתון כי השונות היא $\sigma^2 = 2025$. החוקר החליט כי ידחה את השערת האפס אם $\bar{X} > 105.25$ ואחרת, לא ידחה את השערת האפס. מהי רמת המובהקות של המבחן (בקירוב).

3. הזמן הדרוש לביצוע ניתוח מסוים מתפלג נורמלית עם תוחלת של 8 שעות וסטיית תקן של 4 שעות. רופא מציע שיטת ניתוח חדשה לקיצור התהליך. השיטה נבדקת על מדגם בשל 36 מנותחים. במדגם התקבל ממוצע של $\bar{X} = 6.8$ שעות.
   א. האם שיטת הניתוח המוצעת אמנם מקצרת את זמן הניתוח, ברמת מובהקות 0.01?
   ב. מצא רווח סמך לתוחלת זמן הניתוח לפי השיטה החדשה, ברמת סמך של 98%.
   ג. מה הקשר בין התשובות בסעיפים א' ו-ב' ?

4. עבור כ"א מהטענות הבאות, קבע אם הטענה נכונה/לא נכונה ונמק (אין קשר בין הטענות).
   א. אם השערת האפס החד-צדדית נדחתה ברמת מובהקות 0.05 , אזי ניתן להסיק כי גם עבור כל רמת מובהקות הקטנה מ- 0.05 נדחה את השערת האפס.
   ב. שונות קטנה מעידה שבמדגם רוב המספרים קטנים.
   ג. להקטנת רווח סמך שהתקבל, אפשר להשתמש ברמת בטחון נמוכה יותר.

5. בשנה שעברה נבדקה ההכנסה הממוצעת של שכירים בעיר מסוימת. נמצא שהיא עומדת על 5000 ש"ח עם סטיית תקן של 2500 ש"ח. בבנק ישראל מאמינים שההכנסה של השכירים לא עלתה השנה ואילו במשרד האוצר טוענים שעלתה. כדי לישב את המחלוקת, הוחלט לקחת מדגם מקרי ולקבל את עמדת בנק ישראל אם ממוצע המשכורת שיצא במדגם מקרי של 25 שכירים לא יעלה על 6000 שקל.
   א. מהי רמת המובהקות שבה נבדקה ההשערה?
   ב. מהו הערך הקריטי עבור רמת המובהקות של 0.005?

פתרונות

(1
השערות המבחן:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \le 12,000 \\ H_1 : \mu > 12,000 \end{cases}$$

נתון: $\overline{X}_{100} = 14500 \quad n = 100 \quad \sigma = 2400$

עבור $\alpha = 0.01$ הערך המתאים מהטבלה: $Z_{0.99} = 2.33$.

נשתמש במבחן חד צדדי ימני ונדחה H_0 אם $\overline{X}_{100} > 12000 + \frac{2400}{\sqrt{100}} \cdot 2.33 = 12559.2$.

במקרה שלנו $\overline{X}_{100} > 12559.2$ ולכן נדחה את השערת האפס.
כלומר, נוכל להסיק במובהק כי בשנה נוסעים יותר מ-12,000 ק"מ בממוצע, בר"מ של $\alpha = 1\%$.

(2
החוקר בשאלה מעוניין לבצע מבחן חד צדדי ימני:

$$H_0 : \mu = 100$$
$$H_1 : \mu > 100$$

לשם כך נשתמש במבחן: דחה H_0 אם $\bar{X} > \mu_0 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

עפ"י הנתון בשאלה $n = 225$, $\sigma^2 = 2025$. החוקר החליט שיידחה את H_0 אם $\bar{X} > 105.25$.

נשווה בין שני הביטויים שמתארים את הנקודה הקריטית של המבחן (105.25):

$$Z_{1-\alpha} = 1.75 \Leftarrow 3 \cdot Z_{1-\alpha} = 5.25 \Leftarrow 100 + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{45}{\sqrt{225}} = 105.25$$

$$\boxed{\alpha = 0.0401} \Leftarrow 1 - \alpha = 0.9599 \Leftarrow$$

(3
א. נתון: $X \sim N(8, 4^2)$, $n = 36$, $\bar{X} = 6.8$.

ברצוננו לבדוק את ההשערות:

$$H_0 : \mu = 8$$
$$H_1 : \mu < 8$$

לשם כך נשתמש במבחן חד צדדי שמאלי: דחה H_0 אם $\bar{X} < \mu_0 - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

אצלנו $\alpha = 0.01 \Leftarrow Z_{1-\alpha} = Z_{0.99} = 2.325$.

$\bar{X} < 8 - 2.325 \cdot \frac{4}{\sqrt{36}} = 6.45$.

קיבלנו ש- $\bar{X} = 6.8 > 6.45$, ולכן לא נדחה את השערת האפס ונסיק ששיטת הטיפול החדשה אינה מקצרת את זמן הניתוח.

ב. נשתמש בנוסחה למציאת רו"ס ל- μ :

$$\bar{X} - Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + Z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

רמת הביטחון המבוקשת היא 98% $\Leftarrow \alpha = 0.02 \Leftarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.99} = 2.325$.

נציב ונקבל $6.8 - 2.325 \cdot \frac{4}{\sqrt{36}} \le \mu \le 6.8 + 2.325 \cdot \frac{4}{\sqrt{36}} \Leftarrow 5.25 \le \mu \le 8.35$.

התוחלת לפי השערת האפס (8) מוכלת ברו"ס ולכן ברמת ביטחון של 98% נסיק שהשיטה החדשה לא מקצרת את זמן הניתוח באופן מובהק.

ג. מבחן חד צדדי עם $\alpha = 0.01$ לבדיקת μ אמור לתת את אותה מסקנה של רו"ס ל- μ עם $\alpha = 0.02$ מכיוון שרו"ס הוא תמיד דו צדדי ובכל צד יש רק חצי מרמת המובהקות.

(4

א. הטענה אינה נכונה. בר"מ של 5% השטח של זנב ההתפלגות עבורו נדחה גדול יותר משטח זנב ההתפלגות בר"מ נמוכה.

ב. הטענה אינה נכונה. למשל משתנה מקרי שמקבל את הערך 100000 10 פעמים יהיה בעל שונות אפס.

ג. הטענה נכונה. רמת ביטחון קטנה יותר מקטינה את רווח הסמך.

<u>5)</u>

א).

השערות המבחן:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 5000 \\ H_1 : \mu > 5000 \end{cases}$$

איזור הדחיה- $\bar{X} > 6000$ (איזור הקבלה $\bar{X} \le 6000$)

הערך הקריטי הוא 6000.

$$\alpha = P_{H_0}\left(\mu > 6000\right)$$

$$\alpha = 1 - \phi\left(\frac{6000-5000}{2500/\sqrt{25}}\right) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

ב). הערך הקריטי (K) הוא:

$$0.005 = \alpha = 1 - \phi\left(\frac{K-5000}{500}\right)$$

$$0.995 = \phi\left(\frac{K-5000}{500}\right)$$

$$2.5758 = \frac{K-5000}{500} \quad \Rightarrow \boxed{K = 6287.9}$$